Applied Physics Frontier
November 2013, Volume 1, Issue 4, PP.60-64

Properties of Characteristics to the Conservation Laws Equation

Yinchuan Zhao †, Zhenmin Zhao

Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, P R China

†Email: ychzhao@ncepu.edu.cn

Abstract

This paper was mainly concerned with the characteristics of the Conservation Laws Equation; in which the relationship between the point with minimum on potential function and on the characteristics was taken into account. Then the characteristics were divided into two parts based on the given classification standard. Further, combined with the research of the literature [3], the same conclusion can be reached as well without the initial condition that tends to zero at infinity, which made the application wider.

Keywords: Conservation Law; Characteristics; Non-Degenerate Minimum Point

守恒律方程特征线的性质*

赵引川，赵振敏

华北电力大学 数理学院，北京 102206

摘 要：本文主要研究守恒律方程的特征线问题，考虑方程的势函数的最小值点与特征线上点的关系，最终特征线分成两类，同时给出具体的分类标准，在文献[3]研究的基础上，不再需要初始条件在无穷远处趋于零，同样能得到相同的结论，使得应用的范围更广。

关键词：守恒律；特征线；非退化最小值点

引言

特征是偏微分方程论的一个基本概念，对研究问题解的存在唯一性及其他性质（例如奇性传播）有很重要的意义。特征线方法在研究具有一个时间变量和一个空间变量的一阶拟线性双曲型守恒律方程时尤其重要，可以用来研究方程 Cauchy 问题解的局部存在性，解的整体存在性，解的破裂等问题。我们知道，守恒律方程的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \\ u(x,0)=\phi(x) \end{cases} \tag{1}$$

其中， $f(u)\in C^{\infty}, f''(u)\geq \varepsilon>0$。即使初值 $\phi(x)$ 是光滑的，一般在 $H=R\times(0,\infty)$ 上也不存在古典意义下的解，但只要 $\phi(x)$ 是有界可测的，在 H 上广义解就存在。但是，解在有限的时间内会失去正则性而产生奇性，这一现象称为解的破裂，反映到力学中就是激波现象。一些作者如 Lax[1]在给出方程解的存在性定理的同时，对方程的解做了某些研究。在此之后，Schaeffer[2]使用可微映像的奇点理论，证明了初值属于速降函数的某一第二范畴集合时，Cauchy 问题（1）的解是分片光滑的，且激波的条数是有上限的。国内学者李邦河、王靖华[3]在 Schaeffer 研究的基础上，得到了当初值 $\phi(x)$ 属于更大范围的集合时，仍然能得到文献[2]的所有结论，并且利用特征线方法得到了激波形成点的充要条件。他们还研究了当 t 充分大时，激波的段数和

*基金资助：受中央高校基本科研业务费支持资助（12MS83）。

渐近线，对解的大范围分布得到了比较清晰的图像。此外，汤涛、赵引川[4]在研究 Hamilton-Jacobi 方程的解的整体结构时，也利用特征线方法研究方程解的正则性。本文主要证明了，在有限的时间范围内，势函数有唯一的最小值点，并利用这一性质证明了特征线可以分成两类。在给出易于判定的分类标准时，我们不需要初始条件 $\phi(x)$ 在无穷远处趋于零,这个很强的限制条件仍然能得到文献[3]中的结论。对特征线的研究，我们就可以得到激波曲线的某些性质，建立激波映射，进而研究激波的渐近性为。此外，还可以借助特征线方法来研究方程解的奇性的产生、奇性的传播等问题。因此，对特征线的研究是必不可少且相当重要的，而且特征线理论在流体力学、弹性力学、金融数学等领域也有非常广泛的应用。

1 准备知识

首先，我们来介绍一些常用的函数。为研究守恒律方程的 Cauchy 问题，Schaeffer 利用守恒律方程的势函数

$$F(x,t,u)=tg(u)+\Phi\left(x-ta(u)\right) \tag{2}$$

$$a(u)=f'(u);g(u)=ua(u)-f(u);\Phi(y)=\int_0^y\phi(x)dx \tag{3}$$

Lax 证明了对任意的 $(x,t)\in H$，(x,t) 取定时，势函数的最小值点 $u(x,t)$ 就是方程的弱解。并且当 $u\to\pm\infty$ 时，$F(x,t,\bullet)\to+\infty$。所以对任意 $(x,t)\in H$，势函数总能取到最小值，并且最小值点必是 $F(x,t,\bullet)$ 的临界点。最小值点满足：

$$\frac{\partial F(x,t,u)}{\partial u}=ta'(u)\left\{u-\phi\left(x-a(u)t\right)\right\}=0 \tag{4}$$

能够得到特征线所满足的方程为：

$$x=y_0+ta\left(\phi(y_0)\right) \tag{5}$$

文献[2]中定义的函数：

$$h(s)=\max_{u\in R}\left\{us-f(u)\right\} \tag{6}$$

那么，设在 u 处取得最大值，$us-f(u)=h(s)$，两边分别对 u 求导，最后可以求得

$$\begin{aligned}&h\left(a(u)\right)=ua(u)-f(u)=g(u)\\&h'\left(a(u)\right)=u\\&h''\left(a(u)\right)\cdot a'(u)=1\end{aligned} \tag{7}$$

可见 h 是严格凸的，且 $0<h\le 1/\varepsilon$ 为有界函数。另外对（2）式进行变形，令 $x-ta(u)=y$，则得到

$$a(u)=\frac{x-y}{t} \tag{8}$$

将（8）代入（2），并利用（7）得到，

$$F(x,t,u)=\tilde{F}(x,t,y)=th\left(\frac{x-y}{t}\right)+\Phi(y) \tag{9}$$

定义：如果 u 是 $F(x,t,\bullet)$ 的最小值点，并且 $\frac{\partial^2F(x,t,u)}{\partial u^2}\neq 0\left(\text{或者}=0\right)$，那么称 u 为 $F(x,t,\bullet)$ 的非退化最小值点（或者退化最小值点）。

2 特征线的性质

在这部分，我们讨论特征线和势函数最小值之间的关系，以及特征线能否一直提供最小值点，从而将特征线分成两类，给出易于判定的标准。

引理 1：设 u_0 是 $F(x_0,t_0,\bullet)$ 的最小值点，令 $C=\left\{(x,t)\middle|x=y_0+a\left(\phi(y_0)\right)t,0<t<t_0\right\}$，如果 $(x_1,t_1)\in C$，那么 $F(x_1,t_1,\bullet)$ 有唯一的非退化最小值点 u_0。

证明：u_0 是 $F(x_0,t_0,\bullet)$ 的最小值点，那么能得到 $\phi(y_0)=u_0$， $F(x_0,t_0,u)-F(x_0,t_0,u_0)>0$，利用（9）得到

$$F(x_0,t_0,\mathrm{y})-F(x_0,t_0,\mathrm{y}_0)=t_0h\left(\frac{x_0-y}{t_0}\right)+\Phi(y)-t_0h\left(\frac{x_0-y_0}{t_0}\right)-\Phi(y_0)>0 \tag{10}$$

只要证明对任意的 $y\neq y_0, F(x_1,t_1,\mathrm{y})-F(x_1,t_1,y_0)>0$ 即可，

$$\begin{aligned}
&F(x_1,t_1,\mathrm{y})-F(x_1,t_1,y_0)\\
&=t_1h\left(\frac{x_1-y}{t_1}\right)+\Phi(y)-t_1h\left(\frac{x_1-y_0}{t_1}\right)-\Phi(y_0)\\
&=t_1h\left(\frac{x_1-y}{t_1}\right)-t_0h\left(\frac{x_0-y}{t_0}\right)+t_0h\left(\frac{x_0-y_0}{t_0}\right)-t_1h\left(\frac{x_1-y_0}{t_1}\right)\\
&+t_0h\left(\frac{x_0-y}{t_0}\right)+\Phi(y)-t_0h\left(\frac{x_0-y_0}{t_0}\right)-\Phi(y_0) \qquad (11)\\
&>t_1h\left(\frac{x_1-y}{t_1}\right)-t_0h\left(\frac{x_0-y}{t_0}\right)+t_0h\left(\frac{x_0-y_0}{t_0}\right)-t_1h\left(\frac{x_1-y_0}{t_1}\right)\\
&=t_1h\left(\frac{x_1-y}{t_1}\right)-t_0h\left(\frac{x_0-y}{t_0}\right)+(t_0-t_1)h\left(\frac{x_0-y_0}{t_0}\right)>0 \qquad (12)
\end{aligned}$$

其中(11)式 利用了式子（10），（12）式 利用了函数 h 的严格凸性，且在最小值点 u_0 处有

$$\frac{\partial F(x_1,t_1,u_0)}{\partial u}=0,\text{且}\frac{\partial^2F(x_1,t_1,u_0)}{\partial u^2}\geq 0 \tag{13}$$

当 $(x,t)\in C^-$ 时， $t_1>t>0$，即 $t/t_1<1$，可以推出

$$\frac{\partial F(x,t,u)}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial^2F(x,\mathrm{t},u)}{\partial u^2}\neq 0, \tag{14}$$

所以， $\phi(x_0)$ 是 $F(x,t;\bullet)$ 唯一的非退化最小值点。

所以 $F(x_1,t_1,\mathrm{u})-F(x_1,t_1,\mathrm{u}_0)>0$，且任意的 $(x,t)\in C$， u_0 都是 $F(x,\mathrm{t},\bullet)$ 的唯一非退化最小值点。

定理 1：设 $\phi(x)$ 有界且 $\phi(x)\in C^\infty$，令 $C=\{(x,t)\,|\,x=x_0+a(\phi(x_0))t,t>0\}$ 下面两种情况必有一种出现：

（I）对于每一个 $(x,t)\in C$， $\phi(x_0)$ 是 $F(x,t,\bullet)$ 唯一的非退化最小值点；

（II）如果 $\exists(x_1,t_1)\in C$，使得 $\phi(x_0)$ 是 $F(x_1,t_1,\bullet)$ 唯一的退化最小值点或者 $F(x_1,t_1,\bullet)$ 的一个以上的最小值点之一，那么对于每一个 $(x,t)\in C^-=C\bigcap\{(x,t)\,|\,t_1>t>0\}$， $\phi(x_0)$ 是 $F(x,t,\bullet)$ 唯一的非退化最小值点，而对于 $(x,t)\in C^+=C\bigcap\{(x,t)\,|\,t>t_1\}$， $\phi(x_0)$ 不再是 $F(x,t,\bullet)$ 最小值点。

证明：只要证明（Ⅱ）成立就行，

①由定理 1 的结论，如果 $\phi(x_0)$ 是 $F(x_1,t_1,\bullet)$ 唯一的退化最小值点或一个以上的最小值点之一，那么对 $\forall(x,t)\in C^-$， $\phi(x_0)$ 都是 $F(x,t,\bullet)$ 的唯一非退化最小值点。

②对 $\forall(x,t)\in C^+$，假设存在 $t_2>t_1$，使得 $\phi(x_0)$ 是 $F(x,t;\bullet)$ 的最小值点，有引理 1 的结果，对于任意的 t，当 $0<t<t_2$， $\phi(x_0)$ 是 $F(x,t,\bullet)$ 的唯一的最小值点，这样就与 $\phi(x_0)$ 是 $F(x_1,t_1,\bullet)$ 唯一的退化最小值点或多个最小值点之一相矛盾，所以对 $(x,t)\in C^+$， $\phi(x_0)$ 不再是 $F(x,t,\bullet)$ 最小值点。证毕

定理 1 将特征线分成了两类，一类特征线永远也不会碰到奇异点 ，另一类特征线会在有限的时间点处碰到奇异点，但是，用定理 1 判定相对比较麻烦，我们下面给出另一种易于判断的方法，定理 2 使得特征线永远也不会碰到奇异点，定理 3 去掉了文献[3]中 $\phi(x)$ 在无穷远处趋于零的条件，仍能得到相同的结论，并且定理 3 的证明思路更加简单明了，并且应用的范围更广。

定理 2：若 $\Phi(x)$ 在 x_0 取最小值，则 $F(x,t,u)$ 在由 x_0 出发的特征线 C 上，仅以 $\phi(x_0)$ 为非退化最小值点。

证明：详细证明见参考文献[3]。

定理 3：$\phi(x)$是有界函数，$\Phi(x)$不在x_0处取得最小值时，$F(x,t,u)$不能在以x_0出发的特征线上都以$\phi(x_0)$为最小值。

证明：(1)当$\Phi'(x_0)=\phi(x_0)\neq 0$时，不妨设$\phi(x_0)>0$，只需要证明$F(x_n,t_n,\phi(x_0))-F(x_n,t_n,0)>0$即可。

在由x_0出发的特征线上取一点(x_n,t_n)，从(x_n,t_n)往下引斜率为.的直线与x轴交于点y_n则(x_n,t_n)满足：

$$\begin{cases} x_n = x_0 + t_n a(\phi(x_0)) \\ x_n = y_n + t_n a(0) \end{cases} \tag{15}$$

那么

$$\begin{aligned} & F(x_n,t_n,\phi(x_0))-F(x_n,t_n,0) \\ &= t_n\left[g(\phi(x_0))-g(0)\right]+\Phi\left(x_n-t_n a(\phi(x_0))\right)-\Phi\left(x_n-t_n a(0)\right) \\ &= t_n\left[h(a(\phi(x_0)))-h(a(0))\right]+\Phi(x_0)-\Phi(y_n) \\ &= t_n\left[h'(a(0))\left[a(\phi(x_0))-a(0)\right]+\frac{1}{2}h''(\xi)\left[a(\phi(x_0))-a(0)\right]^2\right]+\Phi(x_0)-\Phi(y_n) \\ &= \frac{1}{2}t_n h''(\xi)\left[a(\phi(x_0))-a(0)\right]^2+\Phi(x_0)-\Phi(y_n) \end{aligned} \tag{16}$$

其中，$\xi\in\left[a(0),a(\phi(x_0))\right]$，$h(a(0))=0$。注意到对$\forall x\in R$，$h''(x)>0$，从而$h''$在$\left[a(0),a(\phi(x_0))\right]$上有一致的正下界，并且$\Phi(x_0)-\Phi(y_n)$是有界函数，因此当$t_n$充分大时，$t_n h''(\xi)\left[a(\phi(x_0))-a(0)\right]^2\to+\infty$。

即t_n充分大时$F(x_n,t_n,\phi(x_0))-F(x_n,t_n,0)>0$

(2)当$\Phi'(x_0)=\phi(x_0)=0$时，由$\Phi(x)$不在x_0处取最小值，则能够找到一点x_1，使得$\Phi(x_0)>\Phi(x_1)$。

从x_0出发的特征线上一点(x_n,t_n)向下引直线过点$(x_1,0)$，则(x_n,t_n)满足：

$$\begin{cases} x_n = x_0 + t_n a(0) \\ x_n = x_1 + t_n a(p_n) \end{cases} \text{且 } p_n\neq 0\text{。} \tag{17}$$

只要证明$F(x_n,t_n,\phi(x_0))-F(x_n,t_n,\mathrm{p}_n)>0$即可。

$$\begin{aligned} & F(x_n,t_n,\phi(x_0))-F(x_n,t_n,p_n) \\ &= t_n\left[g(\phi(x_0))-g(p_n)\right]+\Phi\left(x_n-t_n a(\phi(x_0))\right)-\Phi\left(x_n-t_n a(p_n)\right) \\ &= t_n\left[g(\phi(x_0))-g(p_n)\right]+\Phi(x_0)-\Phi(x_1) \end{aligned} \tag{18}$$

因为$\Phi(x_0)>\Phi(x_1)$，所以$\Phi(x_0)-\Phi(x_1)>0$。

$$\begin{aligned} & g(\phi(x_0))-g(p_n) \\ &= g(0)-g(p_n) \\ &= h(a(0))-h(a(p_n)) \\ &= -\frac{1}{2}h''(\xi)\left[a(p_n)-a(0)\right]^2 \\ &= -\frac{1}{2}h''(\xi)\frac{(x_0-x_1)^2}{t_n^{\,2}} \end{aligned} \tag{19}$$

那么，当t_n充分大时，$t_n\left[g(\phi(x_0))-g(p_n)\right]=-\frac{1}{2}t_n h''(\xi)\frac{(x_0-x_1)^2}{t_n^{\,2}}\to 0$

所以$F(x_n,t_n,\phi(x_0))-F(x_n,t_n,p_n)>0$

综上所述$F(x,t,u)$再从x_0出发的特征线上，不能都以$\phi(x_0)$为最小值点。

定理 3 和定理 4 们就根据$\Phi(x)$初值的不同，将特征线分成了两类。

3 结论

本文主要研究的是守恒律方程特征线在上半空间的性质。通过研究我们证明了方程只存在两类特征线。文章中定理 4 的证明，不需要文献[3]中研究的$\phi(x)$在无穷远处趋于零这个很强的条件，同样能得到相同的结论，并且证明过程简单明了。有了特征线的分类就能建立激波映射，并以此来研究激波的传播规律和方程解的大范围分布。我们期望可以得到解的一个比较清晰的拓扑图像。即 H 被从零时刻出发的特征线分成互不影响的区域，在每个区域内激波形成一个连通分支，并且每个连通分支都是道路连通的。

REFERENCES

[1] Lax, P. D, Hyperbolic systems of conservation laws Ⅱ, Comm. Pure. Appl. Math, 10(1957)

[2] Schaeffer .D. G, A regularity theorem for conservation law [J]. Advances in Mathematics, 1973, Vol. 11: 368-386

[3] 李邦河, 王靖华. 单个守恒律解的大范围定性研究[J]. 北京: 中国科学, 1979, (S1): 12-2

[4] Yinchuan Zhao, Tao Tang, Jing hua Wang, Regularity and Global Structure of Solution to Hamilton-Jacobi Equations I. Convex Hamiltonians[J], Journal of Hyperbolic Differential Equations, Vol. 5, No. 3(2008): 663-680

[5] Wang J., Regularity of entry solutions to no convex scalar conservation laws with monotone initial data, Acted Mathematica Scientia, 2009, Vol.29(No. 3): 613-628

【作者简介】



[1] 赵引川，男，汉族，博士，副教授，偏微分方程。

Email: yhhuang@ncepu.edu.cn

[2] 赵振敏（1988-），男，汉族，在读硕士，偏微分方程。

Email: zhaomin_8811@126.com