Journal of Optics Applications
December 2013, Volume 2, Issue 4, PP.105-109

On solutions of the Nonautonomous Coupled Nonlinear Schrödinger System

***Yehui Huang* [1#] *, Hui Liu* [1]**

Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, P R China

#Email: yhhuang@ncepu.edu.cn

Abstract

The nonautonomous coupled nonlinear Schrödinger system, an important physical model, plays a significant role in the applications of optics, Bose-Einstein condensates, etc. By using the gauge transformation, a connection between the above model and the classical coupled nonlinear Schrodinger system can be constructed; thus the calculation is simplified. In addition, different kinds of solutions to the system can be obtained by appropriate selection of the variable coefficients.

Keywords: Integrable System; Gauge Transformation; Soliton

一类非自治耦合非线性薛定谔系统的求解问题*

黄晔辉，刘慧

华北电力大学数理学院，北京市，102206

摘 要：非自治耦合非线性薛定谔系统是一类重要的物理模型，在光学、玻色-爱因斯坦凝聚等领域有重要的应用。利用规范变换，可将该系统与经典的耦合非线性薛定谔系统联系起来。从而简化其求解过程，通过对变系数进行适当的选择，可以得到非自治耦合非线性薛定谔系统的更为丰富的解。

关键词：可积系统；规范变换；孤立子

引言

非线性薛定谔方程是非线性科学领域最基本也最重要的方程之一，它可以用来建立浅水波模型及模拟光在光纤中的传输，它出现在应用数学和物理的许多分支中，包括非线性量子场论理论、凝聚态物理、生物物理等。非线性薛定谔方程具有孤立子解。孤立子的主要特征是以一个局域波的形式存在，即使两个孤立波碰撞后也仍保持原有的形状和速度[1]。1965 年美国著名科学家 Zabusky 和 Kruskal 用数值模拟方法详细地考察了等离子体中孤立子碰撞的非线性相互作用过程，得到了比较完整和丰富的结果，并进一步证实了孤立子相互作用后不改变波形的论断[2]。现在，已经形成了较为完整的孤立子理论。在非线性光学研究领域里，若已知非线性薛定谔方程的表达式，那么就可以给出孤立子解的数学表达形式。同时非线性薛定谔方程具有无穷多守恒律，它已经成功的解释了大量的非线性现象，尤其是被广泛的用于研究孤立子的产生及传输。例如，利用光纤中的光孤立子可以保持波形不变的传播特性，可成功地完成光孤立子通信上万里的实验，而利用高阶光孤立子的特性，可有效地压窄光脉冲[3]。

非自治耦合薛定谔方程是一类重要的物理模型，在非线性光学，玻色-爱因斯坦凝聚等领域都有重要的应用[4]。其方程具有很多变系数项，因此可以更好的描述现实中的一些现象，其解也可以更好的与实际相对应。对于耦合薛定谔方程的求解问题，国内外有很多专家学者都对其进行了深入的研究[5-8]。但对于非自治的耦合薛定谔方程，由于方程的复杂性，它的求解往往很困难。贺劲松和李翊神通过引入规范变换，研究

*基金资助：受中央高校基本科研业务费支持资助（13QN28）。

了变系数非线性薛定谔方程与常系数非线性薛定谔方程之间的联系[9]。进而从常系数非线性薛定谔方程的解出发，得到变系数系统的解。本文推广了该规范变换，将其应用到非自治耦合薛定谔方程中，从而简化其求解。并且通过对方程的变系数选择合适的函数，可以得到非自治耦合薛定谔方程的更丰富的解。

1 非自治耦合薛定谔方程

考虑如下的非自治耦合薛定谔方程

$$i\psi_{1t}+a\psi_{1xx}+\left(b_1\left|\psi_1\right|^2+b_2\left|\psi_2\right|^2\right)\psi_1+v\psi_1=0 \tag{1}$$

$$i\psi_{2t}+a\psi_{2xx}+\left(b_1\left|\psi_1\right|^2+b_2\left|\psi_2\right|^2\right)\psi_2+v\psi_2=0 \tag{2}$$

其中 $a=a(x,t), b_1=b_1(x,t), b_2=b_2(x,t), v=v(x,t)$ 为待定的函数。在这里 $a(x,t)$ 代表群散射速度，$b_1(x,t), b_2(x,t)$ 代表非线性交互项，$v(x,t)$ 代表外势。如果我们选择 $a=1/2, b_1=b_2=1, v=0$，那么我们就可以得到经典的耦合薛定谔方程

$$iq_{1T}+\frac{1}{2}q_{1XX}+\left(\left|q_1\right|^2+\left|q_2\right|^2\right)q_1=0 \tag{3}$$

$$iq_{2T}+\frac{1}{2}q_{2XX}+\left(\left|q_1\right|^2+\left|q_2\right|^2\right)q_2=0 \tag{4}$$

为了建立方程（1）-（2）和方程（3）-（4）之间的联系，引入变换

$$\psi_1(x,t)=q_1(X,T)\,p_1(x,t)e^{i\varphi(x,t)}, \tag{5}$$

$$\psi_2(x,t)=q_2(X,T)\,p_2(x,t)e^{i\varphi(x,t)}, \tag{6}$$

其中 $X=X(x,t), T=T(t)$。为了保证方程的变换是成立的，我们需要取 T 为只和时间相关的函数。

经过计算，我们发现方程（1）-（2）的系数与变换（5）-（6）存在关系

$$a=\frac{T_t}{2X_x^2}, b_1=\frac{T_t}{p_1^2}, b_2=\frac{T_t}{p_2^2} \tag{7}$$

进一步的，通过研究方程的可积性条件，我们可以得到如下的关系式

$$\begin{aligned}
&X=\int F(x)f_1(t)dx+f_3(t)=\int G(x)g_1(t)dx+f_3(t), T=T(t)\\
&p_1=\frac{f_1(t)}{\sqrt{F(x)f_1(t)}}, p_2=\frac{g_1(t)}{\sqrt{G(x)g_1(t)}}\\
&\varphi=\int\frac{(\int F(x)f_{1t}(t)dx+f_{3t}(t))F(x)f_1(t)}{T_t}dx+f_2(t)\\
&v=-\frac{3T_tF_x^2+2T_tFF_{xx}-16f_1^2(t)\varphi_tF^4(x)-8T_t\varphi_x^2F^2(x)}{16F^4(x)f_1^2(t)}
\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $F(x), f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 是待定的 x 或者 t 的函数。

如果我们选择合适的 $F(x), f_1(t), f_2(t), f_3(t)$，我们就可以得到一个特殊的非自治的耦合薛定谔方程组。实际上，这里的 $F(x), f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 并不是任意的。我们对于实际实验中的外势往往会加上一些限制，也就是方程（1）-（2）中的 $v(x,t)$，然后才能讨论在相关外势的条件下我们所研究的非自治系统的解具有怎样的性质。一般来说，当给定 $v(x,t)$ 之后，方程（1）-（2）是很难进行求解的。但是我们目前得到了关系式（8），我们可以研究方程（3）-（4）的解。然后利用变换（5）-（6）就可以得到方程（1）-（2）的解，从而大大简化了求解的过程。

2 耦合薛定谔方程的求解

在本文中，我们主要利用达布变换的方法来得到耦合薛定谔方程的孤立子解。

耦合薛定谔方程的拉克斯对为

$$\Phi_x = U\Phi, \Phi_t = V\Phi \tag{9}$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} -i\lambda & q_1 & q_2 \\ -q_1^* & i\lambda & 0 \\ -q_2^* & 0 & i\lambda \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -i\lambda^2 + \frac{1}{2}i\left(|q_1|^2 + |q_2|^2\right) & \frac{1}{2}iq_{1X} + \lambda q_1 & \frac{1}{2}iq_{2X} + \lambda q_2 \\ \frac{1}{2}iq_{1X}^* - \lambda q_1^* & i\lambda^2 - \frac{1}{2}i|q_1|^2 & -\frac{1}{2}iq_2 q_1^* \\ \frac{1}{2}iq_{2X}^* - \lambda q_2^* & -\frac{1}{2}iq_1 q_2^* & i\lambda^2 - \frac{1}{2}i|q_2|^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

为 3 阶矩阵，$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^T$ 为拉克斯方程的特征函数，即方程（9）的解。对于耦合薛定谔方程的拉克斯对，可以通过达布变换方法从种子解出发，得到更多类型的解。适用于耦合薛定谔方程的达布变换为

$$\tilde{q}_1 = q_1^{cw} + \frac{2i(\lambda^* - \lambda)\Phi_1\Phi_2^*}{|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2} \tag{11}$$

$$\tilde{q}_2 = q_2^{cw} + \frac{2i(\lambda^* - \lambda)\Phi_1\Phi_3^*}{|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + |\Phi_3|^2} \tag{12}$$

为了得到孤立子解，我们可以令种子解 $q_1^{cw} = q_2^{cw} = 0$，并且取特征值 $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$，这样一来，通过解方程（9）我们可以得到特征函数的具体表达式，

$$\Phi = \left(c_1 e^{-i\lambda X - i\lambda^2 T}, c_2 e^{i\lambda X + i\lambda^2 T}, c_3 e^{i\lambda X + i\lambda^2 T}\right)^T \tag{13}$$

进一步利用达布变换公式（11）-（12），我们可以得到耦合薛定谔方程的孤立子解为

$$q_1 = 2\lambda_I \frac{c_1 c_2^*}{|c_2|^2 + |c_3|^2} e^{-iF_I - C_0} \operatorname{sec}h(F_R - C_0) \tag{14}$$

$$q_2 = 2\lambda_I \frac{c_1 c_3^*}{|c_2|^2 + |c_3|^2} e^{-iF_I - C_0} \operatorname{sec}h(F_R - C_0) \tag{15}$$

其中 $F_R = -2\lambda_I X - 4\lambda_R\lambda_I T, F_I = 2\lambda_R X + 2\lambda_R^2 T - 2\lambda_I^2 T, C_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{|c_1|^2}{|c_2|^2 + |c_3|^2}$。

3 非自治耦合薛定谔方程的求解

在得到耦合薛定谔方程的孤立子解（14）-（15）后，再借助关系式（8）以及（5）-（6），我们就可以得到非自治耦合薛定谔方程的解。在本文中，我们主要考虑光学中在超格势阱影响下的非自治耦合薛定谔系统的亮孤立子解的动力学行为。为了得到超格势阱，我们需要假设关系式（8）中的待定函数为

$$F(x) = \frac{1}{\cos(2x) + \cos(x) + d}, f_1 = 1, f_2 = f_3 = t \tag{16}$$

基于上述假设，我们可以得到势阱的表达式为

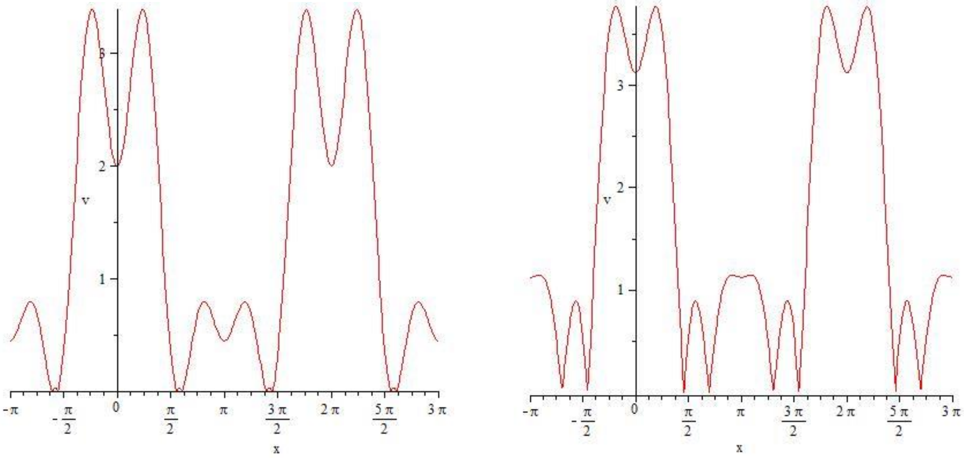
$$v = -\frac{15}{16} + 5\cos^4 x + \frac{9}{4}\cos^3 x - (d + \frac{75}{16})\cos^2 x - (\frac{23}{8} + \frac{1}{8}d)\cos x + \frac{1}{2}d \tag{17}$$

势阱的图像如图 1 所示，对于经典耦合薛定谔方程来说，一般孤立子解的背景为零，而对于非自治系统，往往附加了外势的作用。本文中给出的就是由三角函数生成的一种超格势阱，而我们所得到的孤立子解就是在这个势阱的影响下产生的孤立子解。

进一步，我们还可以得到非自治耦合薛定谔方程的相关系数 $a(x,t), b_1(x,t), b_2(x,t)$ 的具体的表达式。同时，在已知条件（17）的前提下，我们可以由关系式（8）得到我们给出的规范变换中 $p_1(x,t)$，$p_2(x,t)$ 以及 $\varphi(x,t)$ 的具体的表达式。而我们希望求的非自治耦合薛定谔方程的亮孤立子解即

$$\psi_1 = p_1(x,t) * 2\lambda_I \frac{c_1 c_2^*}{|c_2|^2 + |c_3|^2} e^{-iF_I - C_0} \operatorname{sec}h(F_R - C_0) * e^{i\varphi(x,t)} \tag{18}$$

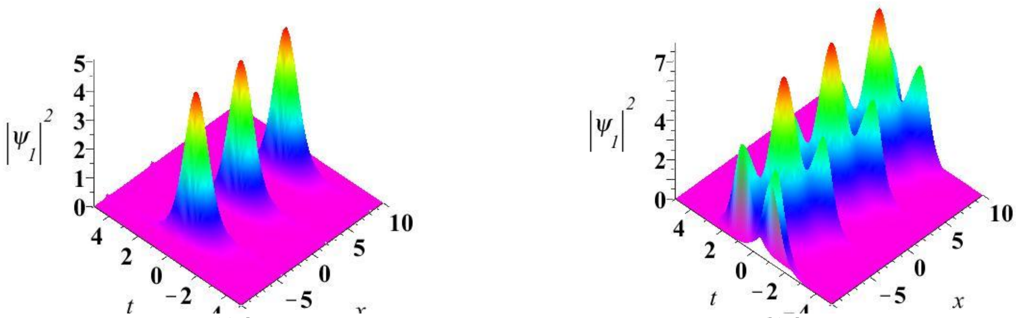
$$\psi_2 = p_2(x,t) * 2\lambda_I \frac{c_1 c_3^*}{|c_2|^2 + |c_3|^2} e^{-iF_I - C_0} \operatorname{sec}h(F_R - C_0) * e^{i\varphi(x,t)} \tag{19}$$



(a) d=1.2 (b) d=3

图 1 非自治耦合薛定谔方程的势阱

利用 maple 软件，我们可以做出在势阱影响下的非自治耦合薛定谔方程的亮孤立子解的图像。从图 2 我们可以看出，由于有外部势阱的影响，亮孤立子解在形状上以及运动轨迹上都发生了很大的变化。而且随着 d 的取值的不同，势阱对于孤立子解的影响也在发生改变。



(a) d=1.2 (b) d=3

图 2 非自治耦合薛定谔方程的亮孤立子解

在这里，我们给出了非自治耦合薛定谔方程的一阶亮孤立子解的图像，如果多次运用达布变换，我们还可以得到多孤立子解。

4 结论

利用规范变换，可以建立非自治耦合薛定谔方程与经典的耦合薛定谔方程之间的联系。对于经典的耦合薛定谔方程，可以通过达布变换进行求解。借助于本文中的规范变换，可以得到非自治耦合薛定谔方程的孤立子解。这给我们提供了一个简捷的方法来研究非自治耦合薛定谔方程的求解问题。通过选择适当的初始函数，本文研究了超格势阱下的非自治耦合薛定谔方程的亮孤立子解。非自治耦合薛定谔方程涵盖了许多重要的物理模型，在本文基础上，以后还可以研究别的势阱下的孤立子解的变化，并且深入讨论不同势阱对于孤立子解的影响。除了亮孤立子解外，非自治耦合薛定谔方程还具有其它类型的解，如暗孤立子解，怪波解等等。接下来我们还将研究非自治耦合薛定谔方程的别的类型的解的求解问题以及研究不同类

型的解之间的相互作用。

REFERENCES

[1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge University Press, 1991.

[2] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Lett., 15 (1965) 240-243.

[3] C. Sulem and P. Sulem, The nonlinear Schroinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[4] R Radhakrishnan and M Lakshmanan, Bright and dark soliton solutions to coupled nonlinear Schrodinger equations, J.Phys. A: Math. Gen. 28(1995) 2683-2692,

[5] B. L. Guo and L. M. Ling, Rogue Wave, Breathers and Bright-Dark-Rogue Solutions for the Coupled Schrodinger Equations, Chin. Phys. Lett. 28 (2011) 110202.

[6] L. C. Zhao and S. L. He, Matter wave solitons in coupled system with external potentials, Phys. Lett. A 375 (2011) 3017–3020.

[7] Q-Han Park and H. J. Shin, Systematic construction of multicomponent optical solitons, Phys. Rev. E 61(3) (1999) 3093–3106.

[8] R Radhakrishnan and M Lakshmanan, Bright and dark soliton solutions to coupled nonlinear Schrodinger equations, J.Phys. A: Math. Gen. 28(1995) 2683-2692.

[9] J. S. He and Y. S. Li, Designable Integrability of the Variable Coefficient Nonlinear Schrodinger Equations, Math. Applied, Studies. 126 (2010) 1–15.

【作者简介】

[1] 黄晔辉（1984-），男，汉族，博士，讲师，孤立子与可积系统。
Email: yhhuang@ncepu.edu.cn

[2] 刘慧（1989-），女，汉族，硕士研究生，偏微分方程。
Email: juban@qq.com