

# The Elementary Formula of an Ellipse Perimeter

Changrun Zhao

The No.1 middle school of Zhanyi, Yunnan, 655331, China

Email: 2819107933@qq.com

## Abstract

Looking for the elementary formula of an ellipse perimeter is a world-class problem. After 20 years of hard pursuit and countless failures, the author sees a little light in the maze of science. Integral mean value theorem lays the strong foundation for the existence of elementary formula, and ultimately the formula is found. At the same time, it also raises a new mathematical constant, which is a major breakthrough in the history of mathematics.

**Keywords:** *Ellipse Perimeter; Elementary Formula; Mean Value Theorem; Mathematical Constant*

## 椭圆周长的初等公式

赵长润

沾益一中，云南沾益 655331

**摘要:** 寻找椭圆周长的代数公式是一个世界级难题。笔者经过二十年的苦苦追寻，在历经无数次失败之后，在科学的迷宫终于见到了一点亮光，积分中值定理为代数公式的存在奠定了坚实的基石，并最终找到了这一公式，同时还引出了一个新的数学常数，这在数学史上也是一个重大突破。

**关键词:** 椭圆周长；初等公式；中值定理；数学常数

## 一、历史的回顾

椭圆是人们最熟悉而又陌生的曲线，说熟悉是因为现实生活中的很多图形呈椭圆形状，如圆柱形萝卜的斜切面就是一个椭圆，隧道的合理拱轴线是椭圆，甚至天体运动的轨迹也是椭圆<sup>[1]</sup>，拿人造卫星来说，如果人造卫星脱离火箭时的速度大于第一宇宙速度（7.9 千米/秒）而小于第二宇宙速度（11.2 千米/秒），那么它的运动轨迹也是一个椭圆，牛顿万有引力定律的推导也是在开普勒椭圆轨道上完成的<sup>[2]</sup>；说陌生是因为：求一个椭圆周长的简单问题都没法顺利进行，背后还涉及到非常复杂的椭圆积分，而一般情况下椭圆积分的原函数无法用初等函数来表达<sup>[3]</sup>，这就使求椭圆周长变得异常艰难，迄今为止，尚没有准确的求椭圆周长的初等函数公式，虽然也有科学家引入了一些近似计算公式，但都没有从根本上撼动这一问题的解决，包括中国清代数学家向明达

（1789~1850）的结论，从理论上看是完美的，但其实际计算过程也是残缺的，“知不足而后勇！”，这也为笔者的后续探索注入了强大的精神动力，“明知山有虎，偏向虎山行”，笔者深信一段弧长不可积不等于整个椭圆周长不可积，因为椭圆中有很高的对称性，对称性的存在又常常可以使问题得以简化，若对全值域范围进行整体考察，只要方法正确就有可能找到椭圆周长的计算公式，正是这一执念支持着笔者二十年如一日的进行探索，不断试错，试错，再试错！用过的草稿纸堆起来有几麻袋，被手指按坏的函数计算器有一提箩，整个探索历程正如宋代诗人陆游所言：“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”，科研工作从来就不是一帆风顺的，而是通过正确与错误的不断纠缠，只有痴心不改和意志顽强者才能最终登上科学的顶峰，实现“人性”与“神性”的统一，把错的都试完了，剩下来的一定是正确的！下面就按椭圆问题自身的逻辑顺序展示椭圆周长公式的产生过程。

## 二、椭圆周长的初等公式

在平面直角坐标系内，椭圆的标准方程是：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0,$$

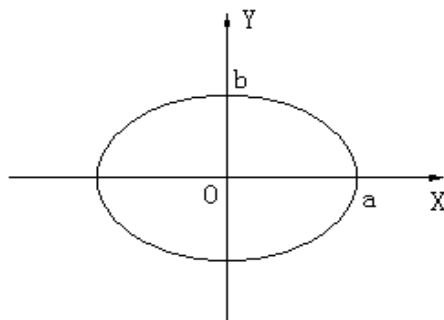


图 (1)

椭圆轨道如图 (1) 所示，其参数方程为：

$$x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi, (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

椭圆周长的积分形式为：

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

其中  $a$ 、 $b$  为半长轴和半短轴，椭圆的离心率  $e$  满足：

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

理论上椭圆周长可用项名达公式：

$$L = 2\pi a \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{e^2}{1} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) \frac{e^6}{5} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}\right) \frac{e^8}{7} - \dots \right]$$

作精确计算，且这一公式与椭圆积分的结果一致，但这是一个无穷级数的形式，实际计算时  $n \neq \infty$ ，计算结果总是带着一定的误差，特别是椭圆比较扁平时，离心率趋近于 1，级数的收敛性较差，计算误差会更大一些！

根据积分中值定理<sup>[4]</sup>：

若  $y = f(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续，则至少存在一个  $\xi$ ，使下面的等式成立：

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) \cdot f(\xi), \text{ 其中 } \alpha \leq \xi \leq \beta$$

将这一结论运用于椭圆积分得椭圆周长的初等公式： $L = 2\pi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi_0 + b^2 \cos^2 \varphi_0}$

其中回归角  $\varphi_0$  为待定函数，正是中值定理挽救了笔者的探究历程，使笔者的研究找到了正确的切入点、找对了方向，最终使笔者走出了科学的迷宫！

## 三、待定函数 $\varphi_0$ 的确定

为了能找到与特定  $a$ 、 $b$  对应的回归角  $\varphi_0$  的值，取  $a = 1, x = \frac{b}{a}$ ，由于普通函数计算器只能取到小数点后第 9 位，所以笔者的探究历程也只取到小数点后第 9 位！

下表 (1) 的第 2、3 列是用椭圆积分得出的结果<sup>[5]</sup>：

表 1

$x = \frac{b}{a}$	椭圆积分		代数公式	
	$L'$	$\sin \varphi'$	$\mathcal{L}$	$\sin \varphi_0$
0.00	4.000000000	0.636619772	4.000000000	0.636619772
0.01	4.001098329	0.636747891	4.001421559	0.636799344
0.02	4.003839159	0.637044279	4.004325331	0.637121710
0.03	4.007909449	0.637459667	4.008460449	0.637547498
0.04	4.013143313	0.637968422	4.013702207	0.638057619
0.05	4.019425619	0.638553147	4.019959591	0.638638499
0.06	4.026668233	0.639200862	4.027159192	0.639279487
0.07	4.034799932	0.639901377	4.035238986	0.639971846
0.08	4.043761126	0.640646423	4.044145174	0.640708221
0.09	4.053500734	0.641429144	4.053830290	0.641482328
0.10	4.063974180	0.642243764	4.064251960	0.642288738
0.11	4.075142024	0.643085357	4.075372008	0.643122725
0.12	4.086968989	0.643949679	4.087155806	0.643980151
0.13	4.099423239	0.644833054	4.099429119	0.644834017
0.14	4.112475832	0.645732272	4.112590880	0.645751203
0.15	4.126100294	0.646644520	4.126186511	0.646658776
0.16	4.140272275	0.647567324	4.140333998	0.647577582
0.17	4.154969285	0.648498496	4.155010486	0.648505382
0.18	4.170170459	0.649436103	4.170194750	0.649440186
0.19	4.185856378	0.650378428	4.185866909	0.650380209
0.20	4.202008907	0.651323945	4.202008516	0.651323878
0.21	4.218611069	0.652271297	4.218602205	0.652269778
0.22	4.235646924	0.653219275	4.235631695	0.653216646
0.23	4.253101474	0.654166801	4.253081677	0.654163358
0.24	4.270960581	0.655112913	4.270937722	0.655108908
0.25	4.289210887	0.656056756	4.289186218	0.656052398

0.26	4.307839753	0.656997565	4.307814293	0.656993029
0.27	4.326835199	0.657934658	4.326809765	0.657930087
0.28	4.346185853	0.658867428	4.346161080	0.658862937
0.29	4.365880906	0.659795338	4.365857274	0.659791013
0.30	4.385910069	0.660717906	4.385887924	0.660713815
0.31	4.406263539	0.661634710	4.406243108	0.661630897
0.32	4.426931962	0.662545372	4.426913378	0.662541868
0.33	4.447906407	0.663449561	4.447889717	0.663446380
0.34	4.469178334	0.664346985	4.469163519	0.664344131
0.35	4.490739572	0.665237391	4.490726559	0.665234855
0.36	4.512582297	0.666120554	4.512570966	0.666118320
0.37	4.534699008	0.666996282	4.534689207	0.666994326
0.38	4.557082508	0.667864410	4.557074060	0.667862703
0.39	4.579725891	0.668724796	4.579718599	0.668723304
0.40	4.602622519	0.669577322	4.602616178	0.669576008
0.41	4.625766012	0.670421888	4.625760410	0.670420711
0.42	4.649150232	0.671258414	4.649145158	0.671257333
0.43	4.672769270	0.672086835	4.672764515	0.672085808
0.44	4.696617436	0.672907103	4.696612798	0.672906087
0.45	4.720689244	0.673719183	4.720684532	0.673718135
0.46	4.744979404	0.674523052	4.744974439	0.674521930
0.47	4.769482813	0.675318697	4.769477430	0.675317461
0.48	4.794194546	0.676106118	4.794188594	0.676104729
0.49	4.819109844	0.676885322	4.819103191	0.676883743
0.50	4.844224110	0.677656326	4.844216640	0.677654522
0.51	4.869532900	0.678419152	4.869524514	0.678417091
0.52	4.895031917	0.679173832	4.895022534	0.679171484
0.53	4.920717001	0.679920402	4.920706558	0.679917740
0.54	4.946584128	0.680658905	4.946572579	0.680655904

0.55	4.972629400	0.681389388	4.972616715	0.681386026
0.56	4.998849041	0.682111901	4.998835208	0.682108160
0.57	5.025239393	0.682826502	5.025224411	0.682822365
0.58	5.051796908	0.683533248	5.051780801	0.683528704
0.59	5.078518147	0.684232203	5.078500944	0.684227242
0.60	5.105399772	0.684923432	5.105381517	0.684918046
0.61	5.132438546	0.685607002	5.132419296	0.685601188
0.62	5.159631325	0.686282983	5.159611147	0.686276741
0.63	5.186975056	0.686951447	5.186954028	0.686944778
0.64	5.214466774	0.687612467	5.214444983	0.687605377
0.65	5.242103599	0.688266119	5.242081138	0.688258615
0.66	5.269882730	0.688912477	5.269859700	0.688904571
0.67	5.297801445	0.689551620	5.297777953	0.689543324
0.68	5.325857097	0.690183625	5.325833253	0.690174955
0.69	5.354047111	0.690808571	5.354023028	0.690799546
0.70	5.382368981	0.691426536	5.382344776	0.691417178
0.71	5.410820268	0.692037600	5.410796058	0.692027932
0.72	5.439398600	0.692641844	5.439374502	0.692631891
0.73	5.468101663	0.693239346	5.468077795	0.693229136
0.74	5.496927208	0.693830186	5.496903683	0.693819751
0.75	5.525873040	0.694414445	5.525849971	0.694403816
0.76	5.554937022	0.694992201	5.554914517	0.694981414
0.77	5.584117073	0.695563535	5.584095234	0.695552626
0.78	5.613411161	0.696128526	5.613390086	0.696117534
0.79	5.642817306	0.696687252	5.642797087	0.696676217
0.80	5.672333577	0.697239791	5.672314298	0.697228756
0.81	5.701958092	0.697786223	5.701939828	0.697775230
0.82	5.731689011	0.698326623	5.731671830	0.698315719
0.83	5.761524542	0.698861068	5.761508501	0.698850301

0.84	5.791462935	0.699389637	5.791448081	0.699379054
0.85	5.821502480	0.699912402	5.821488850	0.699902054
0.86	5.851641509	0.700429440	5.851629128	0.700419378
0.87	5.881878392	0.700940825	5.881867272	0.700931102
0.88	5.912211537	0.701446630	5.912201680	0.701437301
0.89	5.942639391	0.701946928	5.942630781	0.701938048
0.90	5.973160432	0.702441791	5.973153044	0.702433416
0.91	6.003773176	0.702931290	6.003766969	0.702923478
0.92	6.034476172	0.703415496	6.034471090	0.703408306
0.93	6.065268001	0.703894479	6.065263972	0.703887970
0.94	6.096147275	0.704368308	6.096144212	0.704362539
0.95	6.127112636	0.704837048	6.127110438	0.704832084
0.96	6.158162759	0.705300771	6.158161306	0.705296671
0.97	6.189296344	0.705759540	6.189295500	0.705756369
0.98	6.220512121	0.706213420	6.220511735	0.706211242
0.99	6.251808847	0.706662470	6.251808748	0.706661358
1.00	6.283185307	0.707106781	6.283185307	0.707106781

通过对椭圆积分结果的定性分析后<sup>[6]</sup>，直接针对  $\sin \varphi_0$  作一级建模：

$$\sin \varphi_0 = \frac{2}{\pi} + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\pi} \right) x e^{f(x)}, (0 \leq x \leq 1)$$

其中  $x = \frac{b}{a}$ ，反映了椭圆的扁平程度。

在不断试错的基础上，借助几何画板强大的作图功能，对  $f(x)$  作二级建模：

$$f(x) = \frac{k_1(x^{\frac{1}{3}} - \lambda)(1 - x^{\frac{1}{3}})}{1 + k_2 x^{\frac{2}{3}}},$$

其中  $k_1 = 3e^\gamma = 5.343217251$ ， $k_2 = 2\lambda$ ，

这里  $\gamma = 0.5772156649$  为欧拉常数， $\lambda$  是内禀参量，有几何意义，暂时悬空。

#### 四、内禀参量 $\lambda$ 的确定

函数  $f(x)$  取得极值的条件是： $\frac{\dot{f}}{f} = 0$ ，即：

$$\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - \lambda} - \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{1 - x^{\frac{1}{3}}} - \frac{\frac{2}{3}k_2x^{-\frac{1}{3}}}{1 + k_2x^{\frac{2}{3}}} = 0,$$

两边同乘  $\left(x^{\frac{1}{3}} - \lambda\right)\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right)$  并化简得:

$$k_2(1 + \lambda)x^{\frac{2}{3}} - 2(k_2\lambda - 1)x^{\frac{1}{3}} - (1 + \lambda) = 0$$

用求根公式得: (由于  $x$  为正数, 因此舍去负根)

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{k_2\lambda - 1 + \sqrt{(k_2 + 1) + k_2(1 + k_2)\lambda^2}}{k_2(1 + \lambda)}$$

对应的函数  $f$  有极大值:

$$f_{\max} = \frac{k_1(x^{\frac{1}{3}} - \lambda)(1 - x^{\frac{1}{3}})}{1 + k_2x^{\frac{2}{3}}}$$

又在左端点  $x = 0$  处, 函数有最小值  $f_{\min} = -k_1\lambda$ , 且两个相角因子的差 (带宽) 满足:

$$f_{\max} - f_{\min} = \pi$$

这不仅是巧合, 也是问题自洽的内在约束, 因此

$$\frac{k_1(x^{\frac{1}{3}} - \lambda)(1 - x^{\frac{1}{3}})}{1 + k_2x^{\frac{2}{3}}} + k_1\lambda = \pi$$

进一步化简得:

$$[k_2(\pi - k_1\lambda) + k_1]x^{\frac{2}{3}} - k_1(1 + \lambda)x^{\frac{1}{3}} + \pi = 0$$

由于极值点只有一个点, 对应的  $x$  也只能取一个值, 以  $x^{\frac{1}{3}}$  为整体变量, 则上述方程可以看成一元二次方程, 要使方程存在唯一解的条件是其判别式:  $\Delta = 0$ , 即,

$$k_1^2(1 + \lambda)^2 - 4\pi[k_2(\pi - k_1\lambda) + k_1] = 0$$

再将  $k_2 = 2\lambda$  代入并化简得:

$$(k_1^2 + 8k_1\pi)\lambda^2 + (2k_1^2 - 8\pi^2)\lambda + (k_1^2 - 4\pi k_1) = 0$$

解之得 (由曲直交点的性质决定了  $\lambda$  为正):

$$\lambda = \frac{-(2k_1^2 - 8\pi^2) + \sqrt{(2k_1^2 - 8\pi^2)^2 - 4(k_1^2 + 8k_1\pi)(k_1^2 - 4\pi k_1)}}{2(k_1^2 + 8k_1\pi)}$$

将  $k_1 = 5.343217251$  代入得:

$$\lambda = 0.558553970$$

此时对应的极值点为:

$$x = 0.429502373, \quad f_{\max} = 0.157117443$$

而  $x_0^{\frac{1}{3}} = \lambda$  代表“曲直”分界点, 即  $x_0 = 0.174259084$ ,

由此可以看出  $\lambda = 0.558553970$  是系统的内禀参量，有几何意义，同时  $\lambda$  也是一个数学常数<sup>[7]</sup>，由欧拉常数  $\gamma$  和  $\pi$  共同确定。在人类历史上，椭圆积分的最早研究者正是大名鼎鼎的数学巨匠——欧拉。在本文的结论中内禀参量  $\lambda = 0.558553970$  与欧拉常数  $\gamma$  和  $\pi$  之间有逻辑关联，这也算是殊途同归！

## 五、椭圆周长的代数公式

利用  $\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1$ ，椭圆周长的初等公式： $L = 2\pi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi_0 + b^2 \cos^2 \varphi_0}$

变形为  $L = 2\pi \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi_0}$

再将  $\sin \varphi_0$  的拟合公式代入得：

$$L = 2\pi \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \left\{ \frac{2}{\pi} + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\pi} \right) x e^{\frac{5.343217251(x^{\frac{1}{3}} - 0.558553970)(1-x^{\frac{1}{3}})}{1+1.117107940x^{\frac{2}{3}}}} \right\}^2}$$

这就是椭圆周长的代数公式！表（1）的第 4、5 列是用代数公式得出的结果，代数公式的优越性在于计算过程的透明性和有限性，拿吃饭作比，在代数法中人的肠和胃是透明的！食物在里面的运动过程可以看得一清二楚，而椭圆积分的结果对于人类来说是看不见的暗箱操纵，是计算机通过复杂的程序运算才输出结果！但椭圆积分毕竟是历经岁月沉淀的古老方法，在求残缺椭圆的部分弧长时仍然有效，而代数公式只对求完整的椭圆周长成立，对求  $\frac{1}{4}$  椭圆以外的部分弧长时也无能为力！

## 六、对拟合公式的评价

在  $\sin \varphi_0 - x$  坐标系中，两种计算的结果在作图精度范围内无法分离，如图（2）所示：



图（2）  $\sin \varphi_0 - x$  图象

图象的所有特征点基本重叠，说明拟合公式的建模是成功的。一级建模所倚重的是：椭圆积分的结果与直线

$$\sin \varphi_0 = \frac{2}{\pi} + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\pi} \right) x$$

有三个交点：



$$\sin \varphi_0 = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, x=0 \\ \frac{2}{\pi} + (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\pi})x_0, x=x_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, x=1 \end{cases}$$

通过二级建模后， $f(x)$ 取如下形式：

$$f(x) = \frac{5.343217251(x^{\frac{1}{3}} - 0.558553970)(1 - x^{\frac{1}{3}})}{1 + 1.117107940x^{\frac{2}{3}}}$$

用几何画板作图得：

在图（3）中：

$$f = \begin{cases} f_{\max} = 0.157117443, x = 0.429502373 \\ f_{\min} = -k_1\lambda = -2.984475211, x = 0 \end{cases}$$

且  $f_{\max} - f_{\min} = 3.141592654 = \pi$ （带宽）

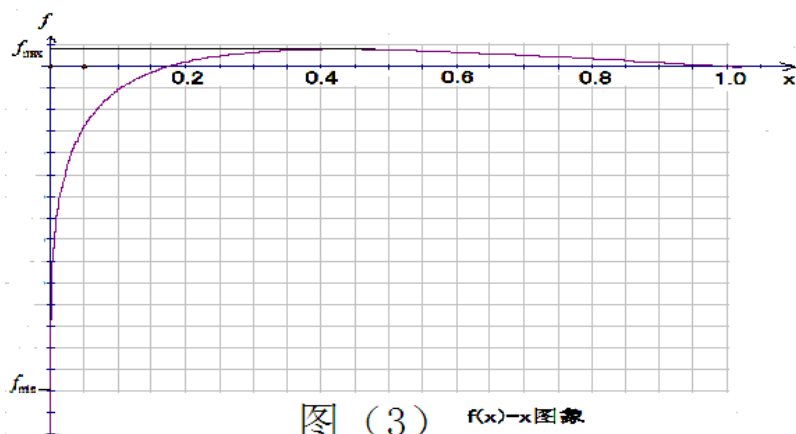
这一发现使拟合函数的人为因素被“挤干”，特别是在拟合函数的“定形”过程中，笔者深切的体会到亚里斯多德提出的“形而上学”的重要性，只有“形”的成功，才有机会触摸到上帝的“手指”，才有机会解开系统内禀参量  $\lambda = 0.558553970$  的面纱！在  $\sin \varphi_0 = \frac{2}{\pi} + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\pi} \right) x e^{f(x)}, (0 \leq x \leq 1)$  中，

用椭圆积分的结果倒推出  $f(x)$  的极值点是：  $f'_{\max} = 0.157146551, x' = 0.429382$

而用代数法得到的结果是：

$$f_{\max} = 0.157117443, x = 0.429502373$$

在这里，代数法推出的结果更具理论价值，因为椭圆积分的结果依赖于向明达公式，而向明达公式的计算带有一定系统误差，所以代数公式对椭圆积分的适当偏离正好弥补了椭圆积分的不足，使代数公式的结论更接近椭圆周长的真实值，这正是代数法的优点所在！



图（3）  $f(x)-x$  图象

## 七、两种计算的精细对比

在物理学中，假说的正确性无法直接验证时，人们转而验证推论的正确性，由拟合函数：

$$\sin \varphi_0 = \frac{2}{\pi} + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\pi} \right) x e^{\frac{5.343217251(x^{\frac{1}{3}} - 0.558553970)(1 - x^{\frac{1}{3}})}{1 + 1.117107940x^{\frac{2}{3}}}}$$

得椭圆的回归角：
$$\varphi_0 = \arcsin \left[ \frac{2}{\pi} + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\pi} \right) x e^{\frac{5.343217251(x^{\frac{1}{3}} - 0.558553970)(1-x^{\frac{1}{3}})}{1+1.117107940x^{\frac{2}{3}}}} \right]$$

其  $\varphi_0 - x$  图像如图 (4) 所示:

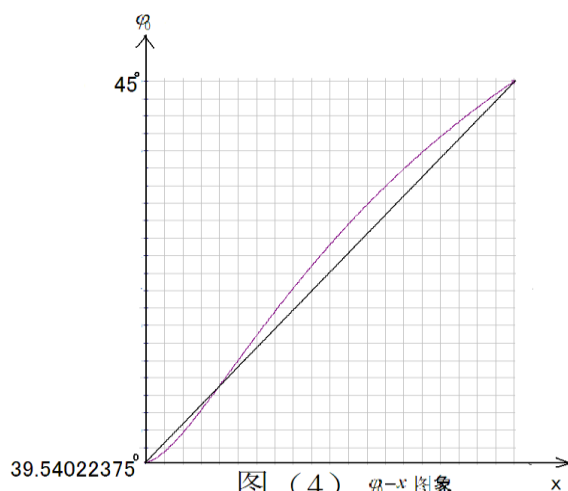


图 (4)  $\varphi_0 - x$  图像

下表 (2) 是在  $\varphi_0 - x$  坐标中, 用代数法得到的曲线和用椭圆积分得到的曲线的精细对比 (远点是相对于直线而言):

表 (2)

特征点		位置	回归角 $\varphi_0$	对应周长 L
左端点		$x=0$	$\varphi_0 = 39.54022375^\circ$	$L = 4a$
小远点	积分法	$x=0.07190$	$\varphi_0 = 39.79478255^\circ$	$L = 4.038139447a$
	代数法	$x=0.073868356$	$\varphi_0 = 39.80559417^\circ$	$L = 4.038171029a$
曲直交点	积分法	$x=0.1944599$	$\varphi_0 = 40.60193129^\circ$	$L = 4.193003635a$
	代数法	$x=0.194418810$	$\varphi_0 = 40.60163814^\circ$	$L = 4.192937367a$
拐点	积分法	$x=0.225500244$	$\varphi_0 = 40.82422122^\circ$	$L = 4.261602642a$
	代数法	$x=0.228510$	$\varphi_0 = 40.84581365^\circ$	$L = 4.250474763a$
大远点	积分法	$x=0.590230050$	$\varphi_0 = 43.17651044^\circ$	$L = 5.079134769a$
	代数法	$x=0.589349695$	$\varphi_0 = 43.17170169^\circ$	$L = 5.076775540a$
右端点		$x=1$	$\varphi_0 = 45^\circ$	$L = 2\pi a$

上述特征点的计算过程极其复杂, 远点的斜率必须等于直线斜率, 拐点的一阶导数必须取最大值, 且每一组数据都要严格按相关概念的数学定义, 采用逐次逼近法算几天才能得出来, 其复杂程度超乎想象, 为了不影响文本结构, 在此仅作简要引述, 由于图象在拐点斜率最大, 图象最陡, 两种计算结果的偏离稍大一点也是可以理解的!

## 八、应用举例

**例 1**、已知椭圆的半长轴  $a=3$ ,半短轴  $b=2$ ,试求该椭圆的周长。

**解答**：先用椭圆积分的方法求：

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0.745355992$$

$$L' = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

用向明达公式编制的计算软件可求得：

$$L' = 15.86543958$$

再用本文所发现的代数公式来求：

$$\text{椭圆的扁平度 } x = \frac{b}{a} = 0.666666666$$

椭圆周长

$$L = 2\pi \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi_0}$$

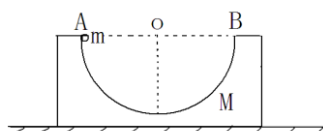
其中  $\sin \varphi_0 = 0.689331201$ ,

$$L = 15.86536954$$

两种方法计算相差  $\Delta L = L' - L = 0.000070044$

**例 2**、如图（5）所示，一个质量为  $m=10$  克的质点从另一质量为  $M=200$  克的半圆形凹槽上的 A 点由静止开始下滑，A、B 两点等高，凹槽内表面光滑，半径  $R=20$  厘米，可在光滑水平面上自由滑动， $g=9.8\text{m/s}^2$ ，问：

- （1）、质点能否运动到右侧轨道上的最高位置 B 点？
- （2）、若能，此时物体的水平位移是多少？总路程是多少？
- （3）、质点运动到轨道最低点处，对轨道的压力是多大？



图（5）

**解答**：

（1）、根据能量守恒、水平方向动量守恒和对称性可得出：质点能运动到右侧轨道的最高点 B，此时质点速度已降为 0，但质点的水平位移  $S \neq 2R$ ，因为质点的运动轨迹并非是半圆而是半个椭圆。

（2）、 $m$  向右运动的同时  $M$  上的圆心  $O$  点也会随  $M$  向左运动，由于整个系统在水平方向不受外力，系统的总质心  $O'$  横坐标不变，设  $m$  的初始位置距离  $O'$ （在  $O$  点左侧某处）的水平距离为  $x_1$ ， $M$  上的圆心  $O$  距离  $O'$  的水平距离为  $x_2$ ，则根据质心运动定理得<sup>[8]</sup>：

$$\begin{cases} mx_1 = Mx_2 \\ x_1 + x_2 = R \end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{M}{m+M}R \\ x_2 = \frac{m}{m+M}R \end{cases}$$

根据对称性，m 运动到凹槽右侧 B 点的总位移（相对与地面）

$$S=2x_1=\frac{2M}{m+M}R < 2R.$$

$$S=38.0952381\text{cm}.$$

总路程  $L \neq \pi R$ , 因为质点的运动轨迹（相对于地面）是半个椭圆轨道，椭圆方程（ $a=R, b=x_1$ ）:

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{x^2}{(\frac{M}{m+M})^2 R^2} = 1$$

用椭圆周长的代数公式可求得质点运动的总路程:  $L = \pi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi_0 + b^2 \cos^2 \varphi_0} = 3.067247936R < \pi R$ .

$$L = 61.34495872\text{cm} < \pi R = 62.831853071\text{cm}.$$

(3)、设 m 运动到最低点时向右运动的速度为  $v_1$ , M 向左运动的速度为  $v_2$ , 根据动量守恒和机械能守恒得:

$$\begin{cases} mv_1 = Mv_2 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 = mgR \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{2\frac{M}{m+M}gR} \\ v_2 = \sqrt{2\frac{m^2}{M(m+M)}gR} \end{cases}$$

m 相对于质心参考系的速度  $v=v_1-(-v_2)=v_1+v_2$ , 由于 m 在最低点时, 质心的瞬间加速度为 0, 属惯性系, 牛顿第二定律成立:

$$N - mg = m \frac{(v_1 + v_2)^2}{\rho}$$

注意, 此处的椭圆曲率半径  $\rho \neq R$ , 根据曲率半径的数学定义<sup>[9]</sup>:

$$\rho = \left| \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|, \quad y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

可求得椭圆长轴 2a 的端点具有最小的曲率半径  $\rho_{\min} = \frac{b^2}{a}$ , 椭圆短轴 2b 的端点具有最大的曲率半径

$\rho_{\max} = \frac{a^2}{b}$ , 结合本题情景可知质点在最低点的曲率半径取最小值, 对轨道的压力取最大值, 即

$$\rho = \frac{b^2}{a} = (\frac{M}{m+M})^2 R$$

所以 m 对轨道的压力 N 满足:  $N = mg + m \frac{(v_1 + v_2)^2}{\rho} = \left( 1 + 2(\frac{m+M}{M})^2 \right) mg = 3.205mg = 0.31409 \text{ 牛}.$

**例 3**、如图（6）所示，放置在光滑水平面上的支架质量为 M, 支架顶端用一根长为 L 的细线拴着质量为 m 的摆球，支架也可以左右自由滑动，现将摆球拉到水平位置后无初速释放，求小球摆动过程中，支架对地面的最大压力。

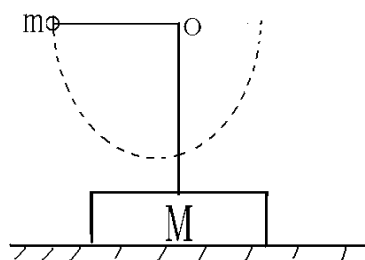


图 (6)

**解答：**此装置与例题 2 的轨道看起来迥异，其实背后的物理本质如出一辙，由于细线的悬点也在运动，小球的运动轨迹并非圆周而是椭圆（用虚线所示），且小球摆到最低点时对绳子的拉力最大，摆动过程只有保守内力做功，系统的机械能守恒，而在最低点处，系统在水平方向不受外力，水平方向的动量也守恒，仿照例题 2 的方法可以求出椭圆轨道的半长轴  $a = L$ ，半短轴  $b = \frac{M}{m+M} L$ ，轨道最低点有最小曲率半径

$\rho_{\min} = \frac{b^2}{a} = \left(\frac{M}{m+M}\right)^2 L$ ，再根据牛顿第二定律和第三定律，支架对地面的最大压力为：

$$N = Mg + T = (M + m)g + 2\left(\frac{m+M}{M}\right)^2 mg$$

伴随椭圆周长代数公式的发现，例 2 和例 3 的问题才最终得以解决，笔者对上述两个问题的思考前后跨度长达 38 年，从 1984 年我参加第一届全国中学生物理竞赛算起，虽然预赛即被淘汰，但我对物理学的兴趣却一发而不可收，由此说明学科竞赛的意义，不在获奖本身，而在获奖之外，通过学科竞赛活动，在学生心中埋下兴趣的种子，几十年后，有一株或几株能长成苍天大树，这既是基础教育之功，也是个人之幸，更是国家和民族之希望所在！

## 九、结束语

科研工作犹如选矿，登上矿山，放眼望去，有一大堆脉矿石横亘田野，由于受制于冶炼技术的瓶颈，甚至在各种废矿渣中还有很多稀有金属深藏其中有待筛选，要选择一个合适的目标课题（矿种），然后以问题为导向进行长期的耐心细致的研究，能否达成集约化生产的目标完全取决于人，取决于科研工作的深入程度。科研工作从一开始就是一个悖论：不知道怎么研究？知道了还研究什么？而绝大多数研究工作都是从一知半解开始的！研究工作摆摆停停，思路曲曲折折，错误和笨办法层出不穷，常常是九十九分汗水才能换来一分灵感，正如莫泊桑所言：“成功，别无选择，惟有与众不同！”，这是科研工作的共性，其中的酸甜苦辣只有经历者才能体会！在本文拟合函数的构建过程中，笔者真正理解了什么是“众里寻她千百度”！什么是“删繁就简”！一个真正的学者要耐得住寂寞，不迷惑于眼前的得失，看淡尘世的喧嚣，对大自然保持一颗敬畏之心和赤子之情，相信“大道至简”是自然界的真谛，所谓“感动上帝”也就是“诚之所至金石为开！”这就是上苍对科研工作者的最大嘉奖！

## 参考文献

- [1] 周志文编《圆锥曲线的八个主要问题》，1981 年，福建人民出版社，21 页的椭圆方程，52~55 页的椭圆性质。
- [2] 牛顿著《自然哲学之数学原理》（王克迪译，袁江洋校），2006 年北京大学出版社，38~45 页，物体在偏心的圆锥曲线上的运动。
- [3] 华罗庚著《高等数学引论》（第一卷，第一分册），1979 年科学出版社，273~274 页，一些不能用已知函数表达的积分。
- [4] В.И.斯米尔诺夫著《高等数学教程》（第一卷，孙念增译），223~224 页，积分中值定理，316~318 页，椭圆周长的近似计算。
- [5] В.И.斯米尔诺夫著《高等数学教程》（第三卷，第三分册，叶彦谦译），263~273 页，椭圆积分和椭圆函数。
- [6] 赵凯华著《定性与半定量物理学》，1991 年高等教育出版社，1~3 页理论曲线与实验曲线的拟合。

- [7] 郭大钧主编《大学数学手册》，1985年山东科学技术出版社，561~573页的特殊函数，985页的数学常数。
- [8] 周衍柏主编《理论力学教程》（修订版），1985年高等教育出版社，116~119页的质心运动定理。
- [9] 周培源著《理论力学》，1952年，人民教育出版社，22~23页，曲率半径，274页，弹道曲线的曲率。

### 【作者简介】

赵长润（1966.05.02—），男，白族，云南省鹤庆县人，  
1989年7月毕业于云南师范大学物理系，大学本科学历，

获理学学士学位，现任沾益一中物理高级教师，主要从事  
物理教学和数理科学研究，对自然科学有浓厚兴趣。