

Research on the Mathematical Modeling and Diagnosis of Rod Pumping System

ShaoXing Liu^{1,2,*}, Shangyue Yang², ShuGuo Yang²

1. Qingdao Science & Technology University Mathematics & Physics College, Qingdao Shandong 266061, China

2. SIP-UCLA Institute for Technologic Advancement, Suzhou, Jiangsu, 215123, China

#Email: ben1989lsx@126.com

Abstract

This paper analyzed and researched the mathematical modeling and the diagnose problems of sucker rod pumping system. Firstly, it established the swing equation of the beam and got the motion mathematical model of the suspension point. Secondly, it researched the Gibbs wave equation and obtained the displacement and load function of the suspension point which is time-varying and got the displacement and load function of the suspension of the pump which is time-varying, and then it put forward the detailed calculation process of the transition from indicator diagram into pump diagram of the suspension point. Finally, it researched the impact of gas inside the pump and proposed the inflatable discriminant algorithm.

Keywords: Gibbss Model, Damping Coefficient, Fourier Coefficient, Effective Stroke

有杆抽油系统的数学建模及诊断*

刘邵星^{1,2}, 杨尚跃¹, 杨树国¹

1. 青岛科技大学数理学院, 山东, 青岛, 266061

2. 苏州工业园区洛加大先进技术研究院, 江苏, 苏州, 215123

摘要: 对有杆抽油系统的数学建模及诊断问题进行了研究。首先, 建立了游梁的摆动方程, 求得了悬点 E 运动的数学模型; 其次, 研究了 Gibbs 波动方程, 得出了悬点处随时间变化的位移和荷载函数, 求得了泵随时间变化的位移和荷载函数, 给出了由悬点示功图转化为泵功图的详细计算过程; 最后, 研究了泵内气体影响情况, 提出了泵内是否充气的判别算法。

关键词: Gibbss 模型; 阻尼系数; 傅里叶系数; 有效冲程

引言

目前, 开采原油广泛使用有杆抽油系统。通过悬点示功图可以初步诊断该井的工作状况。要精确诊断油井的工作状况, 最好采用泵功图。但泵在地下深处, 使用仪器测试其示功数据实现困难大、成本高。因此把悬点示功图转化为杆上任意点的示功图并最终确定泵功图, 以准确诊断该井的工作状况, 是一个很有价值的实际问题。

1 光杆悬点运动规律

1.1 游梁摆动方程的建立

有杆抽油系统四连杆几何结构如图 1 所示。假设曲柄沿顺时针方向做角速度为 w 的匀速周期运动。 $t=0$ 时刻, 曲柄滑块 D 位于上顶点 ($\phi=0$), AB 平行于水平面, E 对应坐标原点 (称为 E 的下死点), E 的位

*基金资助: 受山东省高等学校科技计划项目支持资助(J13LN34)。

移为 0; D 运动到下顶点 ($\phi = \pi$) 时, E 的位移到达最大 (称为 E 的上死点); D 接着运动到上顶点 ($\phi = 2\pi$) 时, E 又回到位移为 0 的位置, 完成一个周期 (即一个冲程) [1,2]

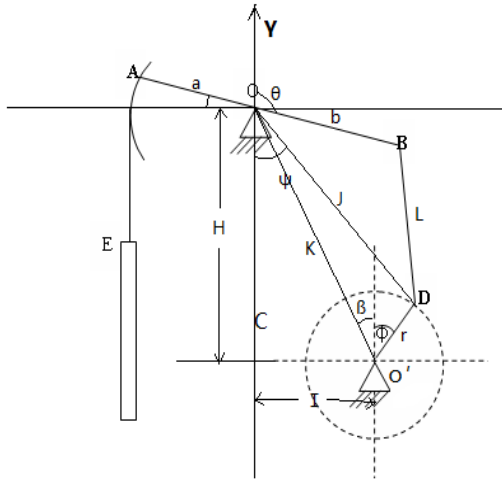


图 1 有杆抽油系统四连杆几何结构图

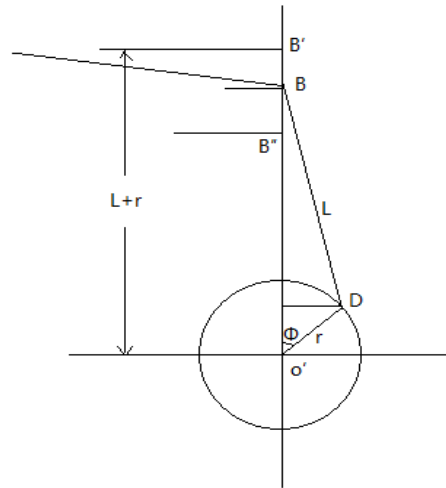


图 2 抽油机简化运动结构图

其中: $\angle YO = \theta$, $\angle COD = \psi$, $\angle OO'M = \beta$, $\angle MO'D = \phi$, $OA = a$, $OB = b$, $BD = L$, $OD = J$, $OO' = K$, $O'D = r$, H 为 O' 到坐标横轴的距离, I 为 O' 到坐标纵轴的距离。

如图 1, 在 $\triangle OBD$ 中, 根据余弦定理可得[3,4]:

$$L^2 = b^2 + J^2 - 2bJ \cos[\pi - (\theta + \psi)]$$

得

$$\theta = \pi - \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + J^2 - L^2}{2bJ} \right) - \psi \quad (1)$$

由几何关系可得:

$$J = \sqrt{(I + r \sin \phi)^2 + (H - r \cos \phi)^2} \quad (2)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{I + r \sin \phi}{H - r \cos \phi} \right) \quad (3)$$

其中

$$\phi = \omega t。$$

实际抽油机的 r/L 值是不可忽略的, 特别式冲程长度较大时, 忽略后会引起很大误差, 为此, 本题中 $r/L \approx 1/4$, 这里我们把 B 点绕游梁支点的弧线运动近似的看做直线运动, 则可把抽油机的运动简化为如图 2 所示的曲柄滑块运动。如 $\phi = 0$ 时, 游梁与连杆的连接点 B 在 B' 处, 为距曲柄轴心最远的位置, 相应于悬点 E 的下死点; $\phi = \pi$ 时, B 在 B'' 处, 为距曲柄轴心最近的位置, 相应于悬点 E 的上死点。在这种简化情况下我们对应的有[3,4]

$$H = O'D + BD = L + r \quad I = OB = b \quad (4)$$

1.2 悬点位移函数

游梁摆动时, 因前、后臂转动的角度相等, 对于任意时刻, 游梁的角位移 $\Delta\theta$ 为[3,4] $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, 式中 θ_0 为游梁初始摆角, 即 $t = 0$ 时刻游梁与纵坐标方向的夹角, 故这里 $\theta_0 = \pi/2$ 。悬点 E 的运动情况可以看做图中 A 点的运动情况, 故任意时刻悬点位移 S_E 为

$$S_E = S_A = a \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + J^2 - L^2}{2bJ} \right) - \psi \right) \quad (5)$$

1.3 悬点速度函数

将式 (1) 两边同时对时间 t 求导数, 可得游梁摆动的角速度 θ' 为[3,4]

$$\theta' = \frac{J + \cos(\theta + \psi)}{bJ \sin(\theta + \psi)} J' - \psi' \quad (6)$$

其中：\$J'\$ 和 \$\psi'\$ 为 \$J\$ 和 \$\psi\$ 对时间的导数。利用式 (2) 和式 (3) 计算整理的得

$$\theta' = \frac{wr [J \sin(\phi + \psi) + b \sin(\phi - \theta)]}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (7)$$

由几何关系不难得到

$$J \sin(\phi + \psi) = K \sin(\phi + \beta) \quad (8)$$

其中：

$$K = \sqrt{I^2 + H^2} \quad \beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{I}{H}$$

将式(7)带入式 (8) 中，得游梁摆动的角速度 \$\theta'\$ 为

$$\theta' = \frac{wr [K \sin(\phi + \beta) + b \sin(\phi - \theta)]}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (9)$$

游梁摆动时，因前、后臂的角速度相等，故任意时刻悬点的速度 \$V_E\$ 为

$$V_E = V_A = a\theta' = \frac{awr [K \sin(\phi + \beta) + b \sin(\phi - \theta)]}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (10)$$

1.4 悬点加速度函数

将式 (9) 两边同对时间 \$t\$ 求导，整理得任意时刻游梁摆动的角加速度 \$\theta''\$ 为

$$\theta'' = \frac{w^2 r [K \cos(\phi + \beta) + b \cos(\phi - \theta)] - 2bwr\theta' \cos(\phi - \theta) - \theta'^2 \cos(\theta + \psi)}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (11)$$

游梁摆动时，因前、后臂的角速度相等，故任意时刻悬点的速度 \$W_E = W_A = a\theta''\$ 为

$$W_E = a \frac{w^2 r [K \cos(\phi + \beta) + b \cos(\phi - \theta)] - 2bwr\theta' \cos(\phi - \theta) - \theta'^2 \cos(\theta + \psi)}{bJ \sin(\theta + \psi)} \quad (12)$$

1.5 结果

对于一定型号的抽油机，其尺寸 \$(a, b, L, H, I, r)\$ 是已知的，给定曲柄旋转的角速度 \$w\$ 或转速 \$n\$，应用以上公式便可计算各运动参数^[3]。以 2012 年全国研究生数学建模 C 题抽油杆的型号和测量数据为例（题目网址 <http://www.shumo.com/home/html/1728.html>）（下文各部分计算结果均以改题目所给数据计算得到），在一个周期内，利用上述模型求得悬点处位移、速度和加速度的变化曲线为：

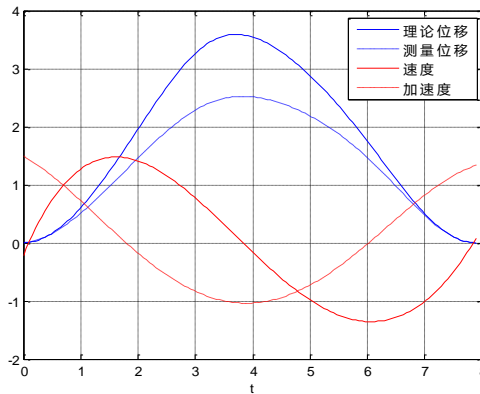


图 3 悬点的测量位移、理论位移、速度及加速度曲线

2 泵功图的计算

2.1 Gibbs 模型——一级杆情况下泵功图的计算

抽油杆的力学模型是一根具有粘滞阻尼的作纵向震动的细长圆杆。经推导，它的运动可用下列微分方程来描述^[5]：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (13)$$

其中： $u(x,t)$ 为抽油杆离地面悬点 x 深处在 t 时刻的位移； a 为应力波在抽油杆中的传播速度； c 为阻尼系数。

2.1.1 波动方程求解

(1) 边界条件

地面悬点边界条件：
$$u(x,t)|_{x=0} = u(t) \quad (14)$$

泵边界条件：
$$au(L,t) = \beta \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = P(t) \quad (15)$$

(2) 初始条件

$$u(x,t)|_{t=0} = u(t) \quad (16)$$

$$F(x,t)|_{x=0} = L(t) - W_r = D(t) \quad (17)$$

其中： $u(t)$ 为实测光杆悬点位移函数， m ； $L(t)$ 为光杆悬点荷载函数， kn ； W_r 为抽油杆柱在流体中的重量， n 。

(3) 连续性条件

$$(F_{i,j})_1 = (F_{i,j})_2 \quad (18)$$

$$(u_{i,j})_1 = (u_{i,j})_2 \quad (19)$$

(4) 悬点位移和荷载方程的求解

将悬点动荷载函数 $D(t)$ 及光杆位移函数 $u(t)$ 展开成傅氏级数：

$$D(t) = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{n=1}^N (\sigma_n \cos n\omega t + \tau_n \sin n\omega t) \quad (20)$$

$$U(t) = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^N (v_n \cos n\omega t + \delta_n \sin n\omega t) \quad (21)$$

根据附件 1 和 2 中给出的悬点处采集的离散的位移和荷载的数据，计算 4 个傅氏系数 $(\sigma_n, \tau_n, v_n, \delta_n)$ ，然后将傅氏系数带入到上面的悬点位移和荷载函数中。即得到悬点处位移和荷载的函数，进而得到悬点处的示功图。

2.1.2 一级杆情况下泵的位移和荷载函数

首先以式 (20) 和式 (21) 为边界条件，用分离变量法求解方程 (13) 便可得出抽油杆任意深度 $u|_{x=0} = \frac{S}{2}(1 - \cos \omega t)$ 截面的位移随时间的变化^[5,7,8]。可求解得一级杆的情况下，抽油杆某一点的位移和荷载函数如下：

(1) 位移函数：
$$u(x,t) = \frac{\sigma_0}{2EA_r} x + \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^N (O_n(x) \cos n\omega t + P_n(x) \sin n\omega t) \quad (22)$$

$$(2) \text{ 荷载函数: } F(x,t) = EA \left\{ \frac{\sigma_0}{2EA} + \sum_{n=1}^N [O'_n(x) \cos n\omega t + P'_n(x) \sin n\omega t] \right\} \quad (23)$$

2.2 多级杆情况下泵的位移和荷载计算

2.2.1 傅里叶系数的求解

设从悬点开始计算序号, 各杆截面积分别为 A_1, A_2, \dots, A_m ; 各杆长度分别为 l_1, l_2, \dots, l_n ; 各杆的直径分别为 d_1, d_2, \dots, d_n ; 傅里叶系数为 ${}_j\sigma_n, {}_j\tau_n, {}_j\mu_n, {}_j\delta_n$, 其中 j 表示与系数有关的抽油杆段。类似的还有 ${}_jO_n(x_j), {}_jP_n(x_j), {}_jO'_n(x_j), {}_jP'_n(x_j)$, 其中左边的脚标 j 表示与系数有关的抽油杆段 (第 j 级抽油杆), 右边 x 的脚标 j 表示该级抽油杆末端的截点, 由于本文只考虑各级抽油杆末端的位移和荷载函数, 故有 $x_j = \sum_{i=1}^j l_i$ 。在直径不同的两级抽油杆接头处, 位移和荷载是连续的, 所以可用第 $j-1$ 级抽油杆末端的位移和荷载, 表示第 j 级抽油杆的边界条件。将式 (20) 与式 (23) 比较, 可得第 j 级的抽油杆所用边界条件的傅里叶系数。

$$(1) \text{ 位移的傅里叶系数: } {}_jv_0 = \frac{{}_{j-1}\sigma_0 x_{j-1}}{EA_{j-1}} + {}_{j-1}v_0, \quad {}_jv_n = {}_{j-1}O_n(x_{j-1}), \quad {}_j\delta_n = {}_{j-1}P_n(x_{j-1});$$

$$(2) \text{ 荷载的傅里叶系数: } {}_j\sigma_0 = {}_{j-1}\sigma_0, \quad {}_j\sigma_n = EA_{j-1} {}_{j-1}O'_n(x_{j-1}), \quad {}_j\tau_n = EA_{j-1} {}_{j-1}P'_n(x_{j-1});$$

2.2.2 多级杆情况下泵的位移和荷载函数

在 5.1 节中一级杆情况下某一点的位移和荷载函数的计算可推广到多级杆情况, 在多级杆情况下, 第 j 级抽油杆下端的位移和荷载函数为^[7,8,9]:

$$(1) \text{ 位移函数: } u(x_j, t) = \frac{{}_j\sigma_0}{2EA_j} x_j + \frac{{}_jv_0}{2} + \sum_{n=1}^N [{}_jO_n(x_j) \cos n\omega t + {}_jP_n(x_j) \sin n\omega t] \quad (24)$$

$$(2) \text{ 荷载函数: } F(x_j, t) = EA_j \left\{ \frac{{}_j\sigma_0}{2EA_j} + \sum_{n=1}^N [{}_jO'_n(x_j) \cos n\omega t + {}_jP'_n(x_j) \sin n\omega t] \right\} \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_jO_n(x_j) = ({}_jk_n \cosh \beta_n x_j + {}_j\delta_n \sinh \beta_n x_j) \sin \alpha_n x_j \\ \quad + ({}_j\mu_n \sinh \beta_n x_j + {}_jv_n \cosh \beta_n x_j) \cos \alpha_n x_j \\ {}_jP_n(x_j) = ({}_jk_n \sinh \beta_n x_j + {}_j\delta_n \cosh \beta_n x_j) \cos \alpha_n x_j \\ \quad - ({}_j\mu_n \cosh \beta_n x_j + {}_jv_n \sinh \beta_n x_j) \sin \alpha_n x_j \\ {}_jO'_n(x_j) = \left[\frac{{}_j\tau_n}{EA_j} \sinh \beta_n x_j + ({}_j\delta_n \beta_n - {}_jv_n \alpha_n) \cosh \beta_n x_j \right] \sin \alpha_n x_j \\ \quad + \left[\frac{{}_j\sigma_n}{EA_j} \cosh \beta_n x_j + ({}_jv_n \beta_n + {}_j\delta_n \alpha_n) \sinh \beta_n x_j \right] \cos \alpha_n x_j \\ {}_jP'_n(x_j) = \left[\frac{{}_j\tau_n}{EA_j} \cosh \beta_n x_j + ({}_j\delta_n \beta_n - {}_jv_n \alpha_n) \sinh \beta_n x_j \right] \cos \alpha_n x_j \\ \quad - \left[\frac{{}_j\sigma_n}{EA_j} \sinh \beta_n x_j + ({}_jv_n \beta_n + {}_j\delta_n \alpha_n) \cosh \beta_n x_j \right] \sin \alpha_n x_j \\ {}_jk_n = \frac{{}_j\sigma_n \alpha_n + {}_j\tau_n \beta_n}{EA_j (\alpha_n^2 + \beta_n^2)} \\ {}_j\mu_n = \frac{{}_j\sigma_n \beta_n + {}_j\tau_n \alpha_n}{EA_j (\alpha_n^2 + \beta_n^2)} \end{array} \right.$$

上面各式中： E 为钢杆弹性模量； A_x 为抽油杆柱在 x 截面处的截面积； ω 为曲柄的角速度；

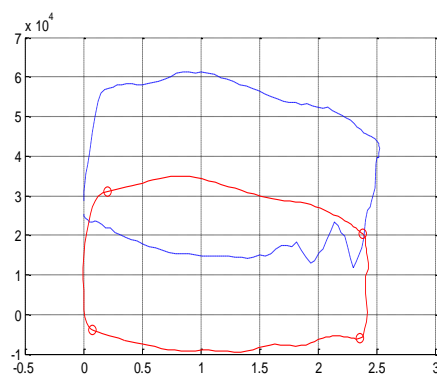


图 4 一级杆口井 7 悬点示功图和一级油杆泵功图

2.2.3 计算流程

下面给出计算求泵的位移和荷载的方法的流程步骤^[7]。

步骤 1: 取得光杆动荷载，位移与时间的函数，即从给出的悬点测得的数据中在一个旋转周期 2π 中选取等分的份数 k 份，即离散化的采样点数，本文取 $k=144$ ；求出 4 个傅里叶系数，代入到的傅里叶级数展开式中，得到 $D(t)$ 和 $U(t)$ 的函数，即可获得悬点处位移和荷载的曲线。

步骤 2: 计算粘滞阻尼系数 C ^[7]。

步骤 3: 计算特殊系数和函数。系数包括 α_n ， β_n ， ${}_j k_n$ ， μ_n ，函数包括 $Q_n(x)$ ， $Q'_n(x)$ ， $P'_n(x)$ ， $P_n(x)$ 。

步骤 4: 判断是否为最后一级杆柱。如果不是最后一级，根据力的连续性原理，转入步骤 5 计算；如果是最后一级，转入步骤 6。

步骤 5: 如果不是最后一级杆柱，则计利用式 (24) 式 (25) 中的注释公式计算下一级杆柱的特殊系数 ${}_j k_n$ ， ${}_j \mu_n$ ， ${}_j Q_n(x_j)$ ， ${}_j P_n(x_j)$ ， ${}_j Q'_n(x_j)$ 和 ${}_j P'_n(x_j)$ 。转入步骤 4。

步骤 6: 如果是最后一级，根据式 (24) 式 (25) 计算出杆柱末端的动荷载函数 $F(x, t)$ 和位移函数 $U(x, t)$ ，进而可得出井下示功图。

2.3 结果

利用建立的模型求解两口油井的泵功图，以 2012 年全国研究生数学建模 C 题抽油杆的型号和测量数据为例，利用建立的模型求解油井的泵功图：（蓝色虚线是悬点示功图，红色实线是泵功图）

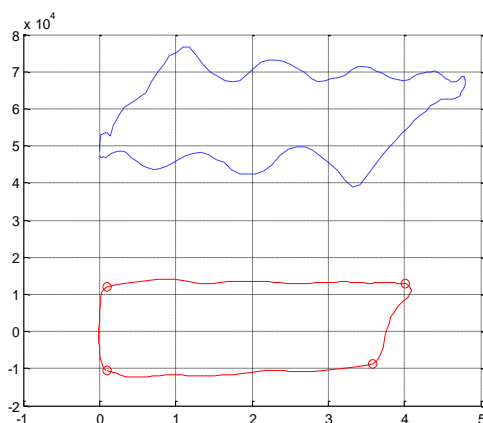


图 5 三级杆口井 7 悬点示功图和泵功图

3 泵内充气判断

3.1 泵内充气判断算法

有杆泵主要由泵筒、柱塞、游动阀和固定阀组成（在这里，我们用 TV 来表示游动阀，用 SV 来表示固定阀，用 P 来表示阀开闭前后泵腔内的压力以及用 S 来表示柱塞的位移^[10,11]）。所以可根据泵功图来确定阀开闭点的位置。

在上行程 SV 开启前，由于 TV 漏失或气体膨胀，使 P 随 S 的增大而减小， F_p 则随之增大，柱塞加载。泵示功图上这一段曲线为增函数，其斜率 $K > 0$ 。在 SV 开启后， $P = P_i$ 为一常数， F_p 保持不变。泵示功图这一曲线为一水平线，其斜率 $K = 0$ 。在 SV 关闭后， P 将随 S 的增大而增大， F_p 则随之减小。泵示功图这一曲线为一减函数，其斜率 $K < 0$ 。

下行程 TV 开启前，由于 SV 漏失或气体压缩等，使 P 随 S 的减小而继续增加， F_p 则随之减小，柱塞卸载。泵示功图上这段曲线为一增函数，其斜率 $K > 0$ 。在 TV 开启后， $P = P_0$ 为一常数， F_p 表示不变。泵示功图上这段曲线为一水平线，其斜率 $K = 0$ 。在 TV 关闭后， P 将随 S 的减小而减小， F_p 逐渐增加。泵示功图上这段曲线为一减函数，其斜率 $K < 0$ 。在上下死点处，斜率 K 发生突变。因此，可利用泵示功图曲线斜率的变化作为确定阀开闭点位置的依据。

当泵内存在气体，在下冲程时，由于甬管内有气体，液体充不满，当柱塞下压时，由于压缩气体的影响，泵内压强不能迅速增大，导致游动阀打开迟缓。基于这种情况，实际确定阀开闭点时，游动阀开启点所代表的数据异常。泵内充气的判定方法为^[1,10,11]：

步骤 1：首先通过求解吉布斯方程，可以求解得到一组离散的数据点 $P_i(X_{i0}, Y_{i0}), (i=1, 2, \dots, n)$ ，然后对它进行归一化处理。

步骤 2：在 P_i 前后各取 k 个点，用最小二乘法对这 $2k+1$ 个点进行线性拟合，并求出 P_i 点斜率：

$$K_i = \frac{(\overline{YX})_i - \bar{Y}_i \cdot \bar{X}_i}{\overline{X_i^2} - (\bar{X})_i^2} \quad (26)$$

其中：
$$\bar{X}_i = \sum_{j=i-k}^{i+k} (X_j) / (2k+1), \bar{Y}_i = \sum_{j=i-k}^{i+k} (Y_j) / (2k+1);$$

$$(\overline{YX})_i = \sum_{j=i-k}^{i+k} (Y_j \cdot X_j) / (2k+1), \overline{X_i^2} = \sum_{j=i-k}^{i+k} (X_j^2) / (2k+1)$$

步骤 3：求得各点处的斜率 K_i 后，我们仍然用本题第一问第二种模型来确定阀的开闭位置，若同时满足以下 4 个条件的，即可判断泵内有气体。

(1) 找到 SV 的开启点记为 P_1 ，并记此时的 $\varepsilon \approx 0.3$ ，且 P_1 前的 k 个点至少有 $k-1$ 个点斜率 $K \geq \varepsilon$ ， P_1 后的 k 个点至少有 $k-1$ 个点斜率 $K \geq \varepsilon$ 。

(2) 找到 SV 的关闭点记为 P_2 ，此时的 $\varepsilon \approx 0.3$ ， P_2 前的 k 个点至少有 $k-1$ 个点斜率 $K \geq -\varepsilon$ ，但是 P_2 后 k 个点并没有 $k-1$ 个点斜率 $K \geq -\varepsilon$ 。

(3) 找到 TV 的开启点记为 P_3 ，然而 P_3 前的 k 个点并没有 $k-1$ 个点斜率 $K \geq \varepsilon$ ， P_3 后的 k 个点至少有 $k-1$ 个点斜率 $K \leq \varepsilon$ 。

(4) 找到 TV 的关闭点记为 P_4 ， P_4 前的 k 个点中至少有 $k-1$ 个点的斜率 $K \geq -\varepsilon$ ；而 P_4 点后的 k 个点中，至少有 $k-1$ 个点的斜率 $K \leq -\varepsilon$ 。

3.2 结果

以 2012 年全国研究生数学建模 C 题抽油杆的型号和测量数据，利用上述方法计算求得油井 7（附件 1）和油井 1（附件 2）的有效冲程、泵内是否有气的判定结果为：

- 1、油井 7: 有效冲程 2.3510 米, 泵内没有充气。
- 2、油井 1: 有效冲程 3.0398 米, 泵内有少量气体。

4 结语

有杆抽油系统的数学建模及诊断是一个很复杂的问题。本文利用数学方法对所给问题进行了分析和计算, 给出了悬点 E 运动的数学模型, 求得了泵随时间变化的位移和荷载函数, 得出了一些较为合理的结论, 具有一定的普适性。

REFERENCES

- [1] 王鸿勋, 张琪.《采油工业原理》[M].石油工业出版社, 1985 年 4 月, 第 2 章: 46-110.
- [2] 万仁溥.《采油工程手册》[M].石油工业出版社, 2000 年 8 月, 第 5 章, 第 2 节: 365-460.
- [3] 王常斌, 陈涛平, 郑俊德. 游梁式抽油机运动参数的精确解 [J].石油学报, 1998, 19 (2): 107-110.
- [4] 向刚. 稠油井杆中管掺热流体闭式循环举升工艺设计 [D].中国石油大学硕士学位论文, 2011:38-46.
- [5] Gibbs.S.G , Method of Determining Sucker Rod Pump Performance.United States Patent Office, Sep.1967.
- [6] 崔臣君. 抽油机在线监测系统与综合评价技术开发研究 [D].中国石油大学硕士学位论文, 2010: 32-55.
- [7] 张琪, 吴晓东. 抽油井计算机诊断技术及其应用 [J].华东石油学院学报, 1984, 第2期: 144-159.
- [8] 陆耀桢, 周鸿康, 陈建明等.有杆抽油泵井下抽油示功图计算机诊断系统 [J]. 实验力学, 1988, 3 (2): 97-103.
- [9] 李娟, 张金芝, 戴林. 杆式抽油机—杆—泵动态模拟数学模型及其求解 [J].内蒙古石油化工, 2011, No.16:92-93.
- [10] 葛述卿. 有杆抽油泵性能及泵功图计算分析 [D].西安理工大学硕士学位论文, 2004: 44-53.
- [11] 周继德. 用示功图拉线法计算抽油机井产量和泵筒漏失量[J].油田地面工程, 1986, (2): 60-62.

【作者简介】



¹ 刘邵星 (1989-), 男, 汉, 硕士研究生, 学生, 应用数学, 青岛科技大学硕士研究生。
Email: ben1989lsx@126.com



² 杨尚跃 (1989-), 男, 汉, 硕士研究生, 学生, 应用数学, 青岛科技大学硕士研究生。
Email: 910421520@qq.com



³ 杨树国 (1970-), 男, 汉, 博士, 教授, 应用数学, 哈尔滨工业大学博士。Email: ysg_2005@163.com