

A New Fractional Partial Differential Equation Model for Image Denoising

Jun Liu, Yi-fei Pu, Ji-liu Zhou

School of Computer Science, Sichuan University, Chengdu 610065, China

Abstract

To overcome the “staircase effect” brought by the traditional integer order ROF image denoising model in smooth regions and the poor visual effect brought by LLT image denoising model although which can suppress the staircase effect, we proposed a new image denoising model with the fractional partial differential equations in this paper, and discussed the influence of fractional order ν and p value in the new model on the denoising results which was then well evaluated by comparison from the aspects of subjective visual effects and PSNR. Experiments show that compared with the two-order ROF model, the four-order LLT model as well as the fractional order ROF model, the new model not only can suppress the staircase effect, but also can improve the image of the peak signal to noise ratio, and can better preserve the image edge and texture details under the action of the optimal fractional order ν and appropriate p values.

Keywords: Image Denoising; Staircase Effect; Partial Differential Equations; Fractional Differential; Digital Image Process

一种新的分数阶偏微分方程图像去噪模型

刘军, 蒲亦非, 周激流

四川大学计算机学院, 四川 成都 610065

摘要: 为克服传统整数阶 ROF 图像去噪模型在平坦区的阶梯效应, 四阶的 LLT 图像去噪模型虽然能抑制阶梯效应但是去噪后图像视觉效果不好的缺点, 提出了一种新的分数阶偏微分方程的图像去噪模型。讨论了新模型中分数阶阶次 ν 与 p 值对去噪结果的影响, 并从主观视觉效果和客观峰值信号比(PSNR)方面对图像的去噪效果进行了评价。实验证明, 与二阶的 ROF 模型, 四阶的 LLT 模型以及分数阶的 ROF 模型相比, 新的去噪模型在最优的分数阶阶次 ν 与一定范围内 p 值的作用下能够更好的抑制阶梯效应, 并且能够在提高图像的峰值信噪比的同时更好的保留图像的边缘和纹理等细节的优点。

关键词: 图像去噪; 阶梯效应; 偏微分方程; 分数阶微分; 数字图像处理

引言

图像去噪一直以来就是图像处理中的重要问题, 图像去噪的主要目的就是去除影响图像主要信息的噪声部分, 同时又希望不破坏图像本身真实信息的边缘和细节部分。传统的去噪方法主要是滤除图像的高频成分来达到去除噪声的目的, 这样就不可避免的滤除了图像的一些边缘和纹理细节, 导致去噪后的图像出现模糊。近 20 年来, 偏微分方程和泛函分析理论已成为图像分析领域的重要方法。传统的偏微分方程用于图像去噪的方法有二阶的 ROF 模型^[1]和四阶的偏微分方程(LLT 模型)^[2], 这些整数阶偏微分方程模型在图像去噪领域最重要的贡献就是引入了各向异性扩散的思想, 它们比一般的各向同性扩散的去噪方法在图像纹理信息保护方面有很大提高。然而这些传统的偏微分方程方法在不同程度上同样存在着各自的缺点, ROF 模型在图像去噪的过程中虽然能够较好的保护图像的边缘, 但是在平滑区可能会出现阶梯效应。为了消除 ROF 模型的这一缺点 You 等人提出了四阶的偏微分方程的模型, 它能消除阶梯效应, 然而它在去噪效

率和保护边缘方面还有待进一步的改善。近年来, 分数阶微积分理论^[3-6]已被很多学者应用到图像底层处理中并取得了较好的效果, 蒲亦非^[7-15]等人将分数阶微分引入数字图像处理, 提出了数字图像分数阶微分掩模及其数值运算方法。结果1证明分数阶微分可以在提高信号高频成分的同时非线性的保留信号中的甚低频, 把它引入图像处理中, 可以在增强边缘的同时, 更好的保留图像平滑区的纹理细节。冯初像^[16]等人提出了基于分数阶微分理论的各向异性扩散图像去噪模型, 并给出了其在频域相关的数值运算。张军, 韦志辉^[19, 20]等人把经典的分数阶微分 G-L 定义结合 ROF 模型提出了一类基于分数阶偏微分方程的图像去噪模型。本文模型将在他们的基础上提出了一种新的分数阶偏微分方程图像去噪模型, 通过分数阶阶次 ν 与 P 值调节扩散系数 $1/|D^\nu u|^{2-p}$, 来更好的保护图像的边缘与纹理细节信息, 实验证明本文去噪模型不仅能够抑制阶梯效应, 还有在去噪的同时更好的保护图像的边缘与纹理细节, 去噪效率良好等优点。

1 相关模型

1.1 传统整数阶图像去噪模型

在许多情况下降质图像可以表示为:

$$u_0(x, y) = u(x, y) + n(x, y) \quad (1)$$

其中: $u_0(x, y)$ 为退化图像, $u(x, y)$ 为原图像, $n(x, y)$ 为加性噪声。从逼近论的角度来看, 去噪的本质就是找出 $u(x)$ 的近似解, 即:

$$\inf \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy \quad (2)$$

对于该不适定问题, 通常如下正则化方法求解:

$$\min_u \lambda \int_{\Omega} R(u) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy \quad (3)$$

其中: 第一项为正则项, 第二项为保真项, λ 为正则化参数。Rudin-Osher-Fatemi 在 1992 年提出了一种经典的正则化方法-ROF 去噪模型, 其能量泛函的表达式如下:

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy \quad (4)$$

式(13)中: 等式右边第一项为正则项, 它在极小化的过程中起到抑制噪声的作用, 第二项为保真项, 它控制着噪声图像与原图像的差异, λ 为正则化参数, 它在正则项与保真项之间起着平衡的作用, $|\nabla u|$ 为图像的梯度模, Ω 为图像的支撑域。

基于偏微分方程的图像去噪模型的去噪实质可以理解为为一个能量泛函寻找极小值的能量耗散的过程。ROF 去噪模型的对应的欧拉-拉格朗日方程以及对应的最速下降法为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda(u - u_0) \quad (5)$$

从式(14)可知, ROF 去噪模型的扩散系数为 $1/|\nabla u|$, 在图像边缘处 $|\nabla u|$ 很大, 扩散系数小, 能比较好的保留图像的边缘信息, 在图像平滑区 $|\nabla u|$ 较小, 扩散系数较大, 能起到较好的去噪作用。然而, 虽然 ROF 去噪模型能够较好的保护图像的边缘信息, 但是在平滑区域仍然会出现过度扩散而产生阶梯效应。为了抑制阶梯效应, 学者们提出了用高阶微分算子构造正则项的方法, 其中以四阶的 LLT 模型应用的最为广泛, 然而, LLT 去噪模型虽然能够抑制阶梯效应, 但是有去噪效果不理想, 去噪速度慢的缺点。

1.2 基于分数阶偏微分方程的图像去噪模型

1.2.1 分数阶 ROF 模型

针对上面两个方法的缺点, 一些学者^[23, 24]把整数阶扩展到分数阶得到了基于分数阶微分理论去噪模型的

*基金资助: 受国家自然科学基金支持资助 (61571312)。

能量泛函（分数阶 ROF 模型）：

$$E(u) = \int_{\Omega} |D^v u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy \quad (6)$$

式(15)中： D^v 为分数阶微分算子， $D^v = (\frac{\partial^v}{\partial x^v}, \frac{\partial^v}{\partial y^v})$ ， $D^v u$ 为分数阶梯度， $|D^v u|$ 为分数阶梯度模值，

$D^v u = (D_x^v u, D_y^v u)$ ， $|D^v u| = \sqrt{(D_x^v u)^2 + (D_y^v u)^2 + \varepsilon}$ ， v 为分数阶阶次， ε 为一个较小正数，防止分数阶梯度为零。从式(15)可以看出当 $v=1$ 时模型就变化为 ROF 模型，当 $v=2$ 时模型就变化为 LLT 模型，整数阶模型只是分数阶模型一个特殊的形式。利用变分原理求解式(15)的极小值，得到其该能量泛函的最速下降流的极小值求解方法：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(D_x^v)^* \left(\frac{D_x^v u}{|D^v u|} \right) - (D_y^v)^* \left(\frac{D_y^v u}{|D^v u|} \right) - \lambda(u - u_0) \quad (7)$$

其中： $(D_x^v)^*$ 为 D_x^v 的共轭， $(D_y^v)^*$ 为 D_y^v 的共轭。

1.2.2 新的分数阶偏微分方程图像去噪模型

针对偏微分方程图像去噪的一些突出问题，以分数阶全变差的思想，本文在分数阶 ROF 去噪模型的基础上提出了一种新的分数阶偏微分方程的去噪模型：

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |D^v u|^p dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx dy, v \in [1, 2], p \in (0, 2) \quad (8)$$

其中： $|D^v u|^p = (\sqrt{(D_x^v u)^2 + (D_y^v u)^2 + \varepsilon})^p$ ， $D^v u = (D_x^v u, D_y^v u)$ ， $D^v = (\frac{\partial^v}{\partial x^v}, \frac{\partial^v}{\partial y^v})$ 。 ε 为一个较小正数，防止分数阶梯度为零。引入时间变量 t ，利用最速下降流的方法可以得到下面的非线性方程(9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(D_x^v)^* \left(\frac{D_x^v u}{|D^v u|^{2-p}} \right) - (D_y^v)^* \left(\frac{D_y^v u}{|D^v u|^{2-p}} \right) - \lambda(u - u_0) \quad (9)$$

从式(9)中可知，本文去噪模型的扩散系数为 $1/|D^v u|^{2-p}$ ，通过 v ($v \in [1, 2]$) 和 p ($p \in (0, 2)$) 调节扩散系数，来更有效的控制噪声图像的去噪效果。

1.2.3 数值计算

离散图像 $u(x, y)$ 的二维离散 Fourier 变换和反 Fourier 变换分别为：

$$u(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{m} \sum_{x, y=0}^{m-1} u(x, y) \exp\left(\frac{-j2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)}{m}\right), \omega_1, \omega_2 = 0, 1, \dots, m-1 \quad (10)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{\omega_1, \omega_2=0}^{m-1} u(\omega_1, \omega_2) \exp\left(\frac{-j2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)}{m}\right), x, y = 0, 1, \dots, m-1, \quad (11)$$

j 为虚数单位。由二维离散 Fourier 变换和反 Fourier 变换的平移性质可知 n 阶差分在频域的等价形式为：

$$D_x^n u \leftrightarrow (1 - \exp\left(\frac{-j2\pi\omega_1}{m}\right))^n u(\omega_1, \omega_2), \quad (12)$$

$$D_y^n u \leftrightarrow (1 - \exp(\frac{-j2\pi\omega_2}{m}))^n u(\omega_1, \omega_2), \quad (13)$$

因此，将整数阶推广到分数阶得到分数阶差分在频域的定义为：

$$D_x^v u \leftrightarrow (1 - \exp(\frac{-j2\pi\omega_1}{m}))^v u(\omega_1, \omega_2), \quad (14)$$

$$D_y^v u \leftrightarrow (1 - \exp(\frac{-j2\pi\omega_2}{m}))^v u(\omega_1, \omega_2), \quad (15)$$

故对式(18)两边进行 Fourier 变换可得：

$$u_{n+1} - u_n = -\Delta t (K_x^* \circ FT(\frac{D_x^v u}{|D_x^v u|^{2-p}}) + K_y^* \circ FT(\frac{D_y^v u}{|D_y^v u|^{2-p}})) \quad (16)$$

其中：FT(·)为傅里叶变换， Δt 为时间步长， K_x^* ， K_y^* 为频域算子，

$$K_x^* = \text{diag}(\text{conj}((1 - \exp(\frac{-j2\pi\omega_1}{m}))^v \exp(\frac{-j2\pi\omega_1}{m})u(\omega_1, \omega_2))) \quad (17)$$

$$K_y^* = \text{diag}(\text{conj}((1 - \exp(\frac{-j2\pi\omega_2}{m}))^v \exp(\frac{-j2\pi\omega_2}{m})u(\omega_1, \omega_2))) \quad (18)$$

2 实验结果与分析

为了验证本文模型的有效性，在 matlab2012b 平台上进行了大量的实验。采用峰值信噪比(PSNR)作为去噪性能的客观评价尺度，PSNR 越大表明图像的去噪过程中图像失真越小。但是很多实验结果的显示，PSNR 最大的时候图像的视觉效果不一定好，所以本文实验将从主客观对图像进行评价。对 512×512 的 lena 图像加入期望为 0， $\sigma = 25$ 的随机噪声，得到其噪声图像，再分别采用 ROF 模型，LLT 模型，分数阶 ROF 模型以及本文的去噪模型对噪声图像进行去噪处理，从图 2(a)(b)(c)(d)(e)(f)和表 1 中可以看出无论从图像的视觉效果还是图像的 PSNR，本文提出的模型都要优于前面 3 种方法。

从新的去噪模型来看还要确定在一定的噪声强度的最优分数阶阶次 v 以及最优的 P 值，表 2 为本文去噪模型处理 512×512 加噪的 lena 图像（噪声为期望为 0，标准差为 $\sigma = 25$ 的随机噪声）在不同分数阶阶次 $v(v \in [1,2])$ 以及不同的 P 值 ($p \in (0,2)$) 下的 PSNR 值。



图 2 本文方法与其它模型的去噪效果对比

表 1 不同的噪声强度四种偏微分方程方法的 PSNR 对比

σ	PSNR				
	加噪 lena 图像	ROF 方法	LLT 方法	分数阶 ROF 法	本文去噪方法
15	24.61	32.18	29.86	32.50	32.93
20	22.12	30.97	28.97	31.15	31.68
25	20.18	30.03	28.47	30.31	30.70

表 2 本文方法不同 ν 和 P 值处理 lena 的 PSNR

$\nu \backslash P$	0.2	0.6	1	1.2	1.6
1	29.57	30.21	30.10	30.30	29.61
1.2	30.39	30.66	30.51	30.27	29.57
1.4	30.58	30.66	30.37	30.12	29.50
1.6	30.62	30.60	30.22	29.96	29.35
1.8	30.59	30.50	30.08	29.77	29.24
2	30.18	30.36	29.96	29.69	29.05

从表 2 中可以明显看出调节 ν ($\nu \in [1,2]$) 和 P ($P \in (0,2)$) 的值能够较好的控制图像的 PSNR。当分数阶的阶次 $\nu \in [1.2, 1.4]$ 且 $P=0.6$ 时，图像能获得较高的 PSNR，并通过实验论证当 $\nu=1.3$ ， $P=0.6$ 时，图像的 PSNR 值为 30.70 为最优，结果如图 3 所示。

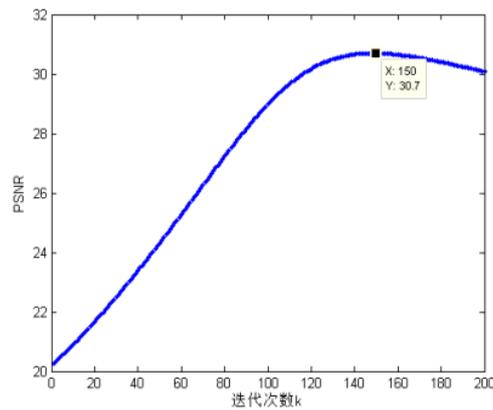


图 3 $\nu=1.3, P=0.6$ 时 PSNR 与迭代次数的关系

新模型与分数阶 ROF 模型的区别在于在引入了正则项的 P 次幂 ($P \in (0,2)$)，实验表明 P 值的引入不仅提高图像的 PSNR 值，而且控制迭代次数 K ，从而达到调节去噪速率的作用。表 3 为在分数阶阶次 $\nu=1.2$ 时，本文模型处理图 2 噪声图像时不同的 P 值 ($P \in (0,2)$) 与 PSNR 和迭代次数 K 的关系，从表 3 中可以看出随着 P 值的增大，图像的 PSNR 先增加后减小，迭代次数 K 急剧减少。故结合图像的 PSNR 和迭代次数 K ，当 $0.6 < P < 1$ 时，实验的效果最优。

表 3 P 与 PSNR 以及迭代次数 K 的关系

P	PSNR	迭代次数 K
0.2	30.35	490
0.6	30.66	135
1	30.51	35
1.2	30.28	17
1.6	29.55	4

图 4 为本文模型处理加入期望为 0， $\sigma = 25$ 的随机噪声的 512×512 的 barb, cameraman 图片在最优的分数阶阶次 ν 和 P 值下的实验结果。



图 4 本文模型处理不同图片的实验结果

3 结论

本文介绍了二阶 ROF 模型和四阶的 LLT 模型各自的优缺点，把分数阶微积分理论引入偏微分方程去噪模型中，构建了分数阶梯度模值的 p 次幂，提出一种新的分数阶偏微分方程图像去噪模型。ROF, LLT 以及分数阶的 ROF 模型只是其一种特殊形式，实验结果表明，它有抑制阶梯效应，去噪效率高，较好的保护边缘和纹理等细节的优点，是一种合理，有效的去噪方法。

4 致谢

在本文完成的同时，感谢蒲亦非老师和周激流老师，在本篇论文完成的过程中他们对我提出了很多指导意见，细心的给我讲解了论文中出现的问题。

5 参考文献

- [1] L.I.Rudin, S.Osher, and E.Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D*, vol.60,no.1-4,pp.259-268, 1992.
- [2] Y.L.You and M.Kaveh, "Fourth-order partial differential equations for noise removal," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, no. 10, pp. 1723-1730, 2000.
- [3] K. B. Oldham and Spanier, *The Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order*, Academic Press, New York, NY, USA, 1974.
- [4] E.R.Love, "Fractional derivatives of imaginary order," *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 3, pp. 241-259, 1971.
- [5] S.G.Samko,A.A.Kilbas,andO.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science, Yverdon, Switzerland, 1987.
- [6] K. Nishimoto, *Fractional Calculus*, University of New Haven Press, New Haven, Conn, USA, 1989.
- [7] 蒲亦非.将分数阶微分演算引入数字图像处理[J]. *四川大学学报: 工程科学版*,2007,39(3) : 124-132.
- [8] 蒲亦非,周激流. 分数阶微积分在现代信号分析与处理中应用的研究[D]. 成都: 四川大学,2006.
- [9] Zhang, Yi; Pu, Yifei ;Zhou,Jiliu," Two New Nonlinear PDE Image Inpainting," *Communications in Computer and Information Science*.
- [10] Y.-F. Pu, X. Yuan, K. Liao, Z.-L. Chen, and J.-L. Zhou, "Five numerical algorithms of fractional calculus applied in modern signal analyzing and processing," *Journal of Sichuan University*, vol. 37, no. 5, pp. 118-124, 2005.
- [11] Y.-F.Pu,Research on application of fractional calculus to latest signal analysis and processing [Ph.D. thesis], Sichuan University, Chengdu, China, 2006.
- [12] Y.-F. Pu, P. Siarry, J.-L. Zhou, and N. Zhang. "A fractional partial differential equation based multi-scale denoising model for texture image." *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 37, no. 12, pp. 1784-1806, 2014.
- [13] Y.-F. Pu, J.-L. Zhou, P. Siarry, N. Zhang, and Y.-G. Liu."Fractional partial differential equation: Fractional total variation and fractional steepest descent approach based multi-scaledenoising model for texture image." *Abstract Appl. Anal.*, ID 483791, 19 pages, 2013.
- [14] 黄果, 许黎, 蒲亦非. 分数阶微积分在图像处理中的研究综述[J]. *计算机应用研究*, 2012.

- [15] 蒲亦非,王卫星. 数字图像的分数阶微分掩模及其数值运算规则[J]. 自动化学报, 2007, 33(11): 1128—1135.
- [16] J.Bai and X.-C.Feng,“Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising,”IEEE Transactions on Image Processing, vol.16,no.10, pp. 2492–2502, 2007.
- [17] P. Perona and J. Malik, “Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion,”IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 12, no. 7, pp. 629–639, 1990.
- [18] P. Blomgren and T. F. Chan, “Color TV: total variation methods for restoration of vector-valued images,” IEEE Transactions on Image Processing, vol. 7, no. 3, pp. 304–309, 1998.
- [19] 张军. 基于分数阶变分 PDE 的图像建模与去噪算法研究[D].南京:南京理工大学, 2009.
- [20] Zhang J,Wei Z H. A class of fractionalorder multiscale variational model and alternating projection algorithm for image denoising[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35: 2516
- [21] 王大凯, 侯榆青,彭进业.图像处理的偏微分方程方法[M].北京:科学出版社,2008:24-47.
- [22] 盖琦,乔兆亮.基于离散四元数傅里叶变换的彩色图像信息隐藏技术[J]. 计算机应用研究, 2011.
- [23] 王飞, 马红, 彭皓.基于分数阶变分问题的 TV 模型[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2012.
- [24] 蒋伟.基于分数阶偏微分方程的图像去噪新模型[J]. 计算机应用, 2011.

【作者简介】



¹ 刘军（1990-），男，汉，硕士研究生，主要研究领域为分数阶微积分在数字图像处理中的应用,智能信息处理，模式识别。Email: tony0857@qq.com;

² 蒲亦非（1975—），男，四川成都人，教授，博士生导师，研究方向为分数阶微积分在信号处理中的应用、模式识别、图像处理、神经网络；

³ 周激流（1963—），男，四川成都人，教授，博士生导师，研究方向为图像处理、人脸识别、无线网络、计算智能。