Mathematical Computation
Volume 12 Issue 1, 2024, PP. 1-9

A Brief Discussion on Parameter Estimation and its Applications

Yintao Lian[1], Li Ma[2†], Wangtian Wang[2], Yuting Wang[1]

1. College of Science, Gansu Agricultural University, Lanzhou, Gansu, 730070, China

2. Gansu Provincial Key Laboratory of Aridland Crop Science, Lanzhou, Gansu, 730070, China

[†]Email: wtwang@gsau.edu.cnn

Abstract

Parameter estimation is a crucial branch of mathematical statistics. This paper aims to theoretically clarify the relationships among various specific estimation methods of parameter estimation and their practical significance. The focus is primarily on the fundamental theories of moment estimation, maximum likelihood estimation, and interval estimation, systematically examining their advantages and limitations. By introducing practical examples, the paper further elucidates the underlying principles of parameter estimation, offering a more profound understanding for the selection and application of these methods.

Keywords: Moment Estimation; Maximum Likelihood Estimation; Interval Estimation

浅谈参数估计及其应用*

廉荫涛[1,2]，马骊[2†]，王旺田[2]，王昱婷[1]

1. 甘肃农业大学理学院，甘肃兰州，730070

2. 甘肃省干旱生境作物学重点实验室 甘肃兰州，730070

摘 要：参数估计是数理统计的一个重要分支。本文旨在理论上明晰参数估计各个具体估计方法之间的关系以及它们在实际应用中的价值。主要聚焦于矩估计、最大似然估计和区间估计的基本理论，系统地探讨它们的优缺点。通过引入实际例子进一步揭示参数估计的本质规律，为方法选择和应用提供更为深刻的认识。

关键词：矩估计；最大似然估计；区间估计

引言

参数估计是在数理统计中对理论研究和实际应用需要，对未知参数或者对含有未知参数的函数进行估计和对总体的数字特征进行估计的一种方法，它在数理统计中是一个非常重要的方法 [0]。本文主要介绍参数估计的两种方法，即点估计与区间估计，并且探讨这两种方法的联系和优缺点。重点是对参数估计的几种方法的理解，难点是对各种方法联系与区别的掌握。通过本文对参数估计几种方法的研究与探讨，可以更好的让人们有一个比较清晰的理解.随着数理统计的发展，在各个行业的应用越来越广泛，比如医疗，股市，建筑，市场消费等，甚至对于一些地震，沙尘暴，海啸等自然灾害的预测都有着举足轻重的作用。参数估计可以科学且精确地让我们预测一个参数的值，然后通过理论的分析，以达到避免灾害或是获取利益的效果。因此参数估计这种方法已经不知不觉的应用到了我们生活的方方面面，它对于人们的生活起到了非常重要的作用，让我们的生活更加的便捷，生活质量也有了一定程度的提升。但是在大众的认知水平中，对于参数估计的方法，却不是特别的了解，为了让人们能更好的利用参数估计为生产生活服务，本文

*基金资助：受国家自然科学基金（32260519）；甘肃省技术创新引导计划-科技特派团专项（23CXNA0041）；甘肃省科技重大专项（22ZD6NA009）；2023 年甘肃省现代寒旱农业科技支撑项目（KJZC-2023-12）；国家现代农业产业技术体系（CARS-12-09）支持资助。

将对常用的参数估计方法做一个比较系统的整理，方便人们更好的了解参数估计，接触参数估计，从而可以更好的应用到人们的生活之中。这样就会避免在生活当中一些不必要的盲目性，使得人们对事物的发展趋势和结果，有个相对清晰的判断和把握，为我们更高效，更舒适便捷的生活提供方便。

1 参数估计常用方法

1.1 矩估计法

1.1.1 基本概念

设 X 为连续型随机变量，其概率分布为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k)$，或 x 为离散型随机变量，其分布律为 $P\{X=x\}=P(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，其中 $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_K$ 为待估参数，$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自 X 的样本。

假设总体 X 的前 K 阶矩：

$$\mu_1=E\left(X^I\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^If(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_K)dx \quad \text{（X 为连续型）}$$

或

$$\mu_1=E\left(X^I\right)=\sum_{x\in R_X}x^IP\left(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\right) \quad \text{(X 为离散型）} I=1,2,\dots k$$

其中，R_X 是 X 最可能取值范围存在。一般来说，他们是 $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_K$ 的函数，基于样本矩 $A_I=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^I$。

依概率收敛于相应的总体矩 $\mu_1(1,2,\dots,k)$，样本矩的连续函数依概率收敛于相应的总体矩的连续函数的估计量[2]。

1.1.2 一般步骤

总体 X 分布函数的未知参数为 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)^T$,如果总体的 k 阶原点矩 $E(X^k)=\alpha_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m),k=1,2,\cdots,m$ 存在，我们设总体的 k 阶原点矩与它的样本的 k 阶原点矩相等

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,\cdots,m$$

即 $$\alpha_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=E(X^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k=A_k,k=1,2,\cdots,m$$

从上面式子可得到关于未知量 θ 的解 $\hat{\theta}_i=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n),i=1,2,\cdots,m$，取 $\hat{\theta}=(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)^T$ 作为 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)^T$ 的估计，就称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩估计[3]。

优点：简单易行，意义明确。缺点：矩估计是基于经验分布函数，而经验分布函数要想更接近真实分布函数，前提条件必须是大样本容量，故在理论上，矩估计是以大样本为应用对象的，所以尽量在大样本下使用矩估计[4]。

1.2 最大似然估计

1.2.1 基本概念

若总体 X 属离散型，其分布律 $P\{X=x\}=p(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$ 的形式为已知，θ 为待估参数，Θ 是 θ 可能取值的范围。设 $X_1,X_2,\dots$，X_N 是来自 X 的样本，则 $X_1,X_2,\dots$，X_N 的联合分布律为：

$$\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

已知样本 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ 取到观察值 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ 的概率，亦即事件 $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$ 发生的概率为：

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta), \theta \in \Theta$$

这一概率随 θ 的取值而变化，它是 θ 的函数，$L(\theta)$ 称为样本的似然函数(注意，这里 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ 是已知的样本值，它们都是常数[5]。关于最大似然估计法，我们有以下的直观想法：现在已经取到样本值 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ 了，这表明取到这一样本值的概率 V 比较大，当然不会考虑那些不能使样本 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ 出现的 $\theta \in \Theta$ 作为 θ 的估计，如果已知当 $\theta = \theta_0 \in \Theta$ 时使 $L(\theta)$ 取很大值，而 Θ 中的其他 θ 的值使 $L(\theta)$ 取很小值，我们自然认为取 θ_0 作为未知参数的估计值，较为合理。即：

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

这样得到的 $\hat{\theta}$ 与样本值 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ 有关，常记为 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，称为参数 θ 的最大似然估计值，而相应的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 称为参数 θ 的最大似然估计量。

若总体 X 属于连续型，设总体的概率函数为 $P(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$，其中 θ 是一个未知参数或几个未知参数组成的参数向量，Θ 是参数空间，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自该总体的一个样本，将样本的联合概率函数看成 θ 的函数，用 $L(\theta; x_1, x_2 \ldots, x_n)$ 表示，简记为 $L(\theta)$。

$$L(\theta) = L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = p(x_1;\theta)p(x_2;\theta)\cdots p(x_2;\theta)$$

$L(\theta)$ 称为样本的似然函数，如果某统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ 满足

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计。

1.2.2 一般步骤

设 $(X_1, \ldots, X_n)$ 为总体 X 的一个样本，$x_1, \ldots, x_n$ 为样本值。若总体 X 为连续性，概率密度为 $f(x;\theta)$，

引入似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta), \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

求使 $\hat{\theta}$ 最大，通常对 $L(\theta)$ 先取对数，

$$\ln L(\theta) = \sum_{i}^{n} \ln f(x_i, \theta)$$

再求导，令其为结果为 0。

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0$$

求出 $L(\theta)$ 的极大值点 $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_{1,} \hat{\theta}_{2,} \cdots \hat{\theta}_k)$，$\hat{\theta}$ 即为 θ 的极大似然估计。

若总体 X 为离散型，则 $L(\theta)$ 中的 $f(x_i;\theta)$ 以 { $X_i = x_i$ } 代替。

优点：相合性与渐进有效性、渐进正态性等，可以计算一些比较复杂的点估计。

缺点：极大似然法一定要知道总体分布形式，并且一般情况下，似然方程组的求解比较复杂，一般需要在计算机上通过迭代运算方能计算出其近似解，且并不是通过求导数都获得极大似然估计值的。

1.3 区间估计

对单个的未知量，人们往往在测量与计算时，并不会满足得到近似值，还会计算出误差。要求得到一个近似值的精确范围。除了求出未知参数的点估计外，人们还希望可以估计出一个精确的范围，并且希望得到这个参数真值的可信程度。这样的范围通常以区间的形式给出。这种形式的估计称为区间估计，这样的区间即所谓置信区间，现在我们引入置信区间的定义[6]。

1.3.1 置信区间

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ，$\theta\in\Theta$（θ 是可能取值的范围），对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$，若由来自 X 的样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 确定的两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 和 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$（$\underline{\theta}<\bar{\theta}$），对于任意 $\theta\in\Theta$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)<\theta<\bar{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)\}\geq 1-\alpha$$

则称随机区间 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 分别称为置信平为的 $1-\alpha$ 双侧置信区间的置信下限和置信上限，$1-\alpha$ 称为置信水平[7]。

1.3.2 置信区间求法

（1）寻求一个样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 和的函数 $W=W(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)$，使得 W 的分布不依赖于 θ 以及其他未知参数，称具有这种性质的函数 W 为枢轴量。

（2）对于给定的置信水平，定出两个常数 a,b 使得：

$$P\{a<W(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)<b\}=1-a$$

若能从 $a<W(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)<b$ 得到与之等价的 θ 的不等式 $\underline{\theta}<\theta<\bar{\theta}$，其中 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，$\bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$。那么 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 就是 θ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，枢轴量 $W=W(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)$ 的构造，通常可以从 θ 的点估计着手考虑。常用的正态总体的参数的置信区间可以用上述步骤推得。

1.3.3 常见的单个正态分布的求法

（1）对 μ 作区间估计，$<\sigma^2>$ 已知，由于 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

则均值 μ 置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

（2）对 μ 作区间估计，$<\sigma^2>$ 未知，由于 $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

则均值 μ 置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

（3）对 σ^2 作区间估计，$<\mu>$ 未知，由于 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

则σ^2置信度为$1-\alpha$的置信区间为：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

2 参数估计的应用

2.1 矩估计的应用

例 1 某车间制造厂，一天中车床出现故障的次数 X 是一个随机变量，假设它服从以$\lambda>0$为参数的泊松分布，参数λ为未知。现有以下的样本值，试估计参数λ。

出故障次数 k	0 1 2 3 4 5 6 ≥7	
发生 k 次故障的天数 n_k	75 90 54 22 6 2 1 0	Σ=250

解：因为$X\sim\pi(\lambda)$，故用样本均值来估计总体的均值$E(X)$。

由已知数据计算得到：

$\overline{X}=\dfrac{\sum_{k=0}^{6}kn_k}{\sum_{k=0}^{6}n_k}$=1/250[0×75+1×90+2×54+3×22+4×6+5×2+6×1]=1.22，即$E(X)=\lambda$的估计为 1.22。

例 2 设某种饮料的净重$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ,σ^2未知，现在随机抽取 8 瓶，试估计总体饮料的净重.测得每瓶重量为（单位为克）。

453	457	454	452.5	453.5	455	456	451

由正态总体的均值和方差

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X} \quad ①$$

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=S_n^2 \quad ②$$

将样本的观测值代入上式，可计算得：

$$\hat{\mu}=455,\quad \hat{\sigma}^2=3.31$$

估计总体饮料的净重为 455 克。

例 3 设总体 X 在[a,b]上服从均匀分布，a，b 未知。$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自 X 的样本，试求 a，b 的矩估计量。

解：$\mu_1=E(X)=(a+b)/2$

$$\mu_1=E(X^2)=D(X)+\left[E(X)\right]^2$$

$$=(b-a)^2/12+(a+b)^2/4$$

即：

$$\begin{cases}a+b=2\mu_1\\ b-a=\sqrt{12(\mu_2-\mu_1^2)}\end{cases}$$

解方程组得：

$$a=\mu_1-\sqrt{3（\mu_2-\mu_1^2）}$$
$$b=\mu_1+\sqrt{3（\mu_2-\mu_1^2）}$$

分别以 A_1, A_2 代替 μ_1, μ_2，得到 a，b 的矩估计量分别为（注意到 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ ）

$$\hat{a}=A_1-\sqrt{3（A_2-A_1^2）} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$
$$\hat{b}=A_1+\sqrt{3（A_2-A_1^2）} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

2.2 最大似然估计的应用

例 4 设有外形完全相同的两个袋子，甲袋有 99 个红球 1 个黄球，乙袋有 1 个红球 99 个黄球。今随机地抽取一袋，然后再从这袋中任取一球，结果发现是红球。问这个袋子是甲袋还是乙袋？

现在的问题是，仅仅从取出的球是红球这一点是无法从逻辑上严格加以判定该袋究竟是甲袋还是乙袋的。但是如果现在一定要我们做出选择，那么我们只能这样来考虑：从袋中取出的球是红球这一点来看，甲袋和乙袋哪个看上去更像是真正从中取球的袋子？

我们这样来分析：如果该袋是甲袋，则取得红球的概率为 0.99；如果该袋是乙袋，则取得红球的概率 0.01。因此，用“该袋是甲袋”来解释所取的球是红球这一事件更有说服力一些，从而我们判定甲袋比乙袋更像一些。最后我们做出推断，这球是从甲袋取出的。

“最大似然原理”，在很多情况下其实就是我们决策时的依据。

一个总体往往都有若干个重要的参数。比如，对于正态总体来说，均值和方差就是两个非常重要的参数。但是在很多情况下，这些参数往往是不知道的，这就需要我们利用抽样所得的部分数据来做统计推断。

假设我们现在获得了一组数据，记为 x，我们需要做的是，利用 x 中所包含的信息来推断总体中的未知参数值。显然，未知参数是有其取值的范围的，我们现在要做的是，在参数可能的取值范围内寻找到一个“看起来最像”的那个值来作为未知参数的估计值.

现在，假设有甲乙两支足球队要进行比赛，某老汉很认真地看了这两支足球队的相关资料，并作了细致的分析，得出了甲队战胜乙队的概率为 p。但是在第二天被朋友问及此事时，该老汉一时犯昏把数字给记混了。他只知道甲队战胜乙队的概率 p 只可能取如下几个值 0，0.1，0.3，0.5，0.75，0.9，但一点也记不清到底哪个数字才是真实的。也就是说，在这个时候，这五个数字没有哪一个看上去更像是真实的 p。于是他开始翻看随身携带的一些资料，发现与这两支足球队有关的资料只有一条，这就是他们在某日的比赛中以平局收场。

看完这组资料以后，老汉再来看以上这六个数字时，发现 0.5 看起来最像，因为用 0.5 来解释刚才看到的资料最有说服力。如果老汉看到的资料中说甲队在某日的比赛中战胜了乙队，那么此时 0.9 将是看起来最像的。由此可见，极大似然估计在生活中，最简单的使用就是当然性，就是我们对事情最有可能出现哪种情况的判断，想着就最有可能是那样，其实里面就包含了我们学习的最大似然估计的原理[8]。

例 5 要估计湖中有多少条鱼，从中捞出 1000 条来，标上记号后放回湖中，然后再捞出 150 条鱼发现其中 10 条鱼有记号，问湖中有多少条鱼，才能使 150 条鱼中出现 10 条带记号的鱼的概率最大？

设估计湖中有鱼 N，从中捞出 r 条，放回后捞出 s 条，发现 x 条有记号。

因为第二次捞出来的鱼为随机变量，用 X 表示，所以 X 服从超几何分布：

$$P\{X=x\}= C_r^x C_{N-r}^{s-x} / C_N^s ,\ \max\{0,s-(N-r)\} \le x \le \min(r,s)$$

令似然函数 $L(N)$ 为 P{X=x}，即：

$$L(N) = C_r^x C_{N-r}^{s-x} / C_N^s$$

由极大似然原理，应选取 $L(N)$ 达到最大值的 N 做为 $\hat{N}$ 的估计值，发现对 $L(N)$ 关于求导很复杂，用 $L(N)$ 与 $L(N-1)$ 的比值：

$$\frac{L(N)}{L(N-1)} = \frac{N-r}{N} \cdot \frac{N-s}{(N-r)-(s-x)} = \frac{N^2-(r+s)N+rs}{N^2-(r+s)N+xN}$$

$L(N)$ 在 $N = \frac{rs}{x}$ 时取到最大值，N 为正整数，则取 $\hat{N} = [\frac{rs}{x}]$ 为 N 的极大似然估计值，

$$N \le \frac{rs}{x}$$

代入数据得：

$$N \le \frac{1000 \times 150}{10} = 15000$$

所以出现 10 带记号的鱼的概率最大，湖里至少有 15000 条鱼。

在工业中用极大似然法来估计产品的合格率。

例 6 设某工序生产的产品的不合格率为 p，抽 n 个产品作检验，发现有 T 个不合格，试求 p 的极大似然估计。

解：设 X 是抽查一个产品时的不合格品个数，则 X 服从参数为 p 的二点分布 $b(1,p)$. 抽查 n 个产品，则得样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，其观察值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，假如样本有 T 个不合格，即表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有 T 个取值为 1， $n-T$ 个取值为 0。

写出似然函数：

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-P)^{1-x_i}$$

对 $L(p)$ 取对数，得对数似然函数：

$$l(p) = \sum_{i=1}^{n} [x_i \ln p + (1-x_i) \ln(1-p)] = n \ln(1-p) + \sum_{i=1}^{n} x_i [\ln p - \ln(1-p)]$$

故将 $l(p)$ 对 p 求导，令其为 0，得似然方程：

$$\frac{dl(p)}{dp} = -\frac{n}{1-p} + \sum_{i=1}^{n} x_i (\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}) = -\frac{n}{1-p} + \frac{1}{p(1-p)} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

解方程得：

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

故用得 p 的极大似然估计为：

$$\hat{p} = \overline{X}$$

生物方面也用极大似然法做统计。

2.3 区间估计法的应用

例 7 假设参加某种寿险投保人的年龄服从正态分布，标准差为 σ=7.77 岁。从中抽取 36 人组成一个简单随机样本（重复抽样），其平均年龄为 39.5 岁，试建立投保人平均年龄 μ 的 90 %的置信区间。

解：假设用随机变量 X 表示某种寿险投保人的年龄，则由已知条件有 $X \sim N(\mu, 7.77^2), \bar{X} = 39.5$，n=36。

与置信度 90%相对应的 α=0.10，查表，得到：

$$Z_{0.10/2} = Z_{0.05} = 1.645$$

由公式 $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 得，总体均值 μ 的置信度为 90%的置信区间为：

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 39.5 \pm 1.645 \times \frac{7.77}{\sqrt{36}} = (37.37, 41.63)$$

于是可以说，寿险投保人总体的平均年龄介于 37.37 到 41.63 岁之间。

例 8 有一批饼干，现从中随机地取 16 袋，称得重量（以 g 计）如下：

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装饼干的重量近似地服从正态分布，试求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：这里 $1-\alpha$=0.95，$\alpha/2$=0.025，n-1=15，$t_{0.025}(15)$=2.1315，由给出的数据算得 $\bar{x}$ = 503.75，s = 6.2022。

由 $\left(\overline{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$ 得均值的一个置信水平为 0.95 的置信区间为：

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315\right)$$

即（500.4，507.1）

这就是说估计袋装饼干重量的均值在 500.4g 与 507.1g 之间，这个估计的可信程度为 95%，若以此区间内任一值作为 μ 的近似值，其误差不大于 $\dfrac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \times 2 = 6.61\text{g}$，这个误差估计的可信程度为 95%。

3 讨论

文中主要聚焦于矩估计、最大似然估计和区间估计的基本理论，系统地讨论了它们的优缺点。在研究中，我们发现矩估计在某些情况下具有简便性和直观性，但在处理非线性问题时可能存在一定的限制。最大似然估计则以最大化似然函数为目标，提供了一种更为统一和一致的估计方法，但在样本较小或模型复杂时可能面临数值计算上的挑战。而区间估计则为估计结果提供了一定的置信区间，更有利于对估计精度进行全面的评估。

通过引入实际例子，我们更深入地揭示了参数估计的本质规律。这些例子不仅帮助我们理解不同方法的应用，还在实际问题中展示了它们的效果。这对于方法选择和应用提供了更为深刻的认识，使我们能够更加灵活地运用这些方法解决具体问题。

总的来说，本文的讨论为研究者提供了一个全面了解参数估计方法并在实践中灵活应用的基础。这对于推动统计学领域的研究和实际应用都具有重要的意义。未来的研究方向可以进一步探索不同参数估计方法在特定领域的应用，以及如何更好地克服各种潜在限制。

4 结论

本文详细探讨了参数估计的三种主要方法：矩估计、最大似然估计和区间估计。矩估计以其直观和简便的特点被广泛使用，但在处理非线性模型和高阶矩时存在明显局限。相比之下，最大似然估计提供了更为一致的结果，尽管在数值计算方面可能面临挑战。区间估计为估计结果提供了可信度的度量，为决策者提供更全面的信息，有助于准确评估估计的精度和可靠性。

参考文献

[1] 林静,唐国强,覃良文.基于小波分析与贝叶斯估计的组合统计建模[J].桂林理工大学学报,2017,37(01):217-222.

[2] 李荣玲.概率论与数理统计[M].云南大学出版社:202008.202.

[3] 潘永博.偏正态误差分布下一元线性回归模型的参数估计及比较[D].郑州大学,2017.

[4] 刘鲁华.导弹试验多源信息融合及精度鉴定方法研究[D].中国人民解放军国防科学技术大学,2002.

[5] 李明泉.对最大似然估计法教学的探讨[J].牡丹江大学学报,2010,19(07):116-118.

[6] 王卫国.数据融合方法及其应用技术的研究[D].河北理工大学,2005.

[7] 吴黎.基于 MODIS 数据温度植被干旱指数干旱监测指标的等级划分[J].水土保持研究,2017,24(03):130-135+3.

[8] 霍建新.高斯的“大手笔”[J].中国统计,2010,(05):57-58.

【作者简介】

[1] 廉荫涛（1997-），男，甘肃武威人，在读硕士，主要研究方向为生物统计。

[2] 马骊（1991-），男，甘肃临泽人，副教授，主要研究方向为作物遗传育种。Email: wtwang@gsau.edu.cnn

[3] 王旺田（1975-），男 ，甘肃平凉人，副教授，主要研究方向为作物遗传育种 。Email: mai@gsau.edu.cn

[4] 王昱婷（2002-），女，甘肃靖远人，在读硕士，主要研究方向为经济统计。